This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909534 1

Geometrische Aufgaben

zum

Gebrauch bei Vorlesungen, beim Unterricht an höhern Lehranstalten

und zum

Selbst-Studium,

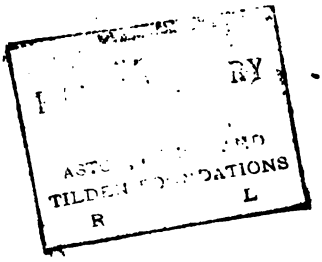
von

L. Oettinger.
Professor in Heidelberg.

Erste Abtheilung.

Karlsruhe,
in der Chr. Fr. Müller'schen Hofbuchhandlung.

1832.


ASTOR
TILDEN
R
L

Vorrede.

Es wäre überflüssig, die Brauchbarkeit, welche die Geometrie für das Leben hat, den Nutzen und Einfluß, den sie auf die Entwicklung der menschlichen Geisteskraft durch Bildung des Verstandes, Erweckung des Scharfsinnes und der Urtheilskraft äussert, als eine bekannte Sache, näher erörtern zu wollen, um die Erscheinung der vorliegenden Sammlung geometrischer Aufgaben, die der Anwendung einer so wichtigen Wissenschaft gewidmet ist, zu rechtfertigen.

Denn, wenn schon die einfache Einsicht in den Bau und das Gefüge einer Wissenschaft geeignet ist, die Verstandesthätigkeit des Menschen zu bilden und zu schärfen; so muß es die Anwendung ihrer einzelnen Doctrinen auf vorgelegte Probleme, da sie neben der Auffassungskraft vorzugsweise die eigene Thätigkeit des menschlichen Geistes in Anspruch nimmt, in einem weit höhern Grade thun und nicht allein den Verstand und die Urtheilskraft beleben und schärfen, sondern auch die Erfindungsgabe und den Forschungsgeist anregen und wecken.

Hiezu kömmt, daß die Anwendung allein der sicherste Weg ist, sich die Lehren einer Wissenschaft vollkommen anzueignen, das Lückenhafte auszufüllen, dem Mangelhaften nachzuhelfen und eine noch unsichere und schwankende Grundlage zu befestigen, denn nichts entschwindet leichter dem Gedächtnisse, als das, wovon wir keine Anwendung zu machen wissen, und nichts prägt sich ihm fester und sicherer ein, als das, was durch Anwendung und eigene Thätigkeit sein Eigenthum geworden ist.

Von diesen Ansichten ausgehend, glaubt der Verfasser eine nicht ganz unwillkommene Arbeit zu liefern, und wünscht, daß sie günstig aufgenommen werden möge.

Es fehlt zwar keineswegs an Werken über geometrische Aufgaben, aber keines entsprach dem Zweck und der Ansicht, die sich der Verfasser von einem solchen Werke bildete, denn es sind größtentheils Sammlungen, die sich entweder nur über einzelne Zweige erstrecken, und daher nicht von allgemeiner Anwendung und Brauchbarkeit sind, oder sie sind, wenn auch von größerer Ausdehnung, eine Zusammenstellung verschiedenartiger, nicht nach einem Plane geordneter Aufgaben und nicht immer reichhaltig genug, um einer größern Anforderung zu genügen, so schätzbar sie auch im Einzelnen seyn mögen.

Dieß hat den Verfasser veranlaßt, eine Sammlung geometrischer Aufgaben, von größerm Umfange und zweckmäßiger zusammengestellt, zu bearbeiten und zur Benutzung vorzulegen.

Die Ausdehnung, welche diese Sammlung hat, läßt sich aus den Ueberschriften der acht Kapitel der zwei Abtheilungen, worein das Werk zerfällt, erkennen.

Erste Abtheilung.

1) Aufgaben über Linien und Winkel und ihre Verbindung unter einander.
2) Aufgaben über geometrische Construction algebraischer Formeln.
3) Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.
4) Aufgaben über das gleichschenklige und gleichseitige Dreieck.

Zweite Abtheilung.

5) Aufgaben über das Dreieck im Allgemeinen.
6) Aufgaben über das Viereck.
7) Aufgaben über den Kreis.
8) Aufgaben über größte und kleinste Werthe.

Ueber Plan und Anordnung ist folgendes zu bemerken:

Die vorliegende Sammlung sollte in einem Bande ausgegeben werden. Da sie aber gegen Erwarten zu einer größern Bogenzahl, als sich anfänglich vermuthen ließ, anlief, so wurde sie des bequemern Gebrauchs wegen in zwei Abtheilungen mit fortlaufender Seiten- und Paragraphenzahl getrennt.

In diese Sammlung sind die Aufgaben über Verwandlung und Theilung der Figuren, so wie über algebraische Geometrie nicht aufgenommen (auch ein besonderer Abschnitt über vermischte Aufgaben hätte sich bearbeiten lassen); denn eine solche Ausdehnung lag vorerst nicht im Plane und hätte das Werk leicht zu theuer und dadurch unzugänglich machen können; sie konnte auch um so mehr umgangen werden, da über diese Zweige schon Sammlungen vorhanden sind. Sollte die vorliegende Sammlung sich einer günstigen Aufnahme erfreuen, so kann eine dritte Abtheilung in Uebereinstimmung mit dem Ganzen nachfolgen.

Bei der Bearbeitung der Aufgaben der einzelnen Kapitel ist der Verfasser von dem Leichtern zum Schwerern übergegangen und hat sich bemüht, die Aufgaben so aneinander zu reihen, daß sie eine Stufenfolge bilden.

Zuerst sind die Aufgaben, welche sich aus der kleinsten Anzahl der Elemente construiren lassen, gegeben und aufgelöst; dann die, deren Construction auf einer größern Elementen-Zahl beruht u. s. f.

Bei jeder Abstufung aber wurden die Aufgaben, die sich durch die einfachen Elemente direkt erzeugen lassen, dann die, welche zur Construction Summen, Differenzen ꝛc. erfordern, behandelt, wie sich dieß aus der Anordnung in den Kapiteln leicht erkennen läßt.

Dabei war nicht zu vermeiden, daß nicht leichtere, oder auch in andern Büchern schon behandelte Aufgaben

aufgenommen wurden. Sie sind mitgetheilt, weil sie nach der Anlage des Ganzen am gehörigen Orte ihre Stelle finden mußten.

Wie fruchtbar diese systematische Behandlungsweise in Auffindung geometrischer Aufgaben ist, wird die Reichhaltigkeit der vorliegenden Sammlung, da in ihr die Zahl der bekannten durch eine nicht unbedeutende Zahl neuer Aufgaben vermehrt ist, zeigen. Insbesondere wird dieß sehr klar hervortreten, wenn man diese Methode zur Auffindung neuer Aufgaben auf einen speziellen Fall z. B. auf das rechtwinklige Dreieck anwendet, wo als Constructions-Elemente Kathete, Hypotenuse, Winkel, Abschnitte, Höhe, Quadrate, Summen, Unterschiede, Produkte dieser Elemente, Inhalt, Hülfslinien, Verhältnisse, Theilpunkte u. s. w. zu Gebote stehen und ein unabsehbares Gebiet für die Erfindung und Combination öffnen. Ein systematisches Aufsteigen von einem Elemente zum andern und ein schickliches Anreihen derselben unter einander wird eine unglaubliche Menge sehr interessanter Aufgaben auffinden lassen. Das dritte Kapitel soll als ein Versuch, nach dieser Methode zu arbeiten, betrachtet werden. Mehr kann es nicht seyn. Der Zweck ist erreicht, wenn der Eifer zu weiterer Nachforschung angeregt ist.

Die Aufgaben über die verschiedenen Arten von Dreiecken sind in drei Kapitel abgetheilt; während man vielleicht erwartet hatte, sie als zusammengehörig und nach Analogie der Aufgaben über das Viereck in ein Kapitel gefaßt zu finden.

Diese Trennung wird sich aber durch die zweckmäßige Anordnung im Ganzen zu besserer Zusammenstellung und bequemerer Uebersicht rechtfertigen lassen. Dadurch war zwar nicht zu vermeiden, daß nicht manches frühere wiederkehrte, oder wiederkehren mußte. Jedoch ist es nie eine Wiederholung, sondern nur eine Anwendung auf ähnliche

Fälle, oder unter bestimmten Modifikationen zu nennen. Ein Zweck muß dem andern untergeordnet werden.

Was nun die Methode betrifft, nach der die vorliegenden Aufgaben behandelt sind, so ist keiner vorzugsweise gehuldigt und es sind wo möglich beide, die analytische oder algebraische und rein geometrische, gegeben. Es sollen nach dem Plane des Verfassers beide geübt werden, damit die andere helfe, wenn die eine ihre Dienste versagt.

Bei den Aufgaben, wo Winkel vorkommen, und also trigonometrische Formeln zur Auflösung nöthig geworden wären, ist keine analytische, als nicht hierher gehörig, gegeben. Im Spätern wurden die analytischen Auflösungen übergangen, weil sie zu viel Raum erfordert hätten.

Der Zweck nun war bei Bearbeitung der vorliegenden Aufgaben zweierlei: einerseits dem Lehrer ein Hülfsmittel an die Hand zu geben, um seinen Vortrag zu ergänzen und den Unterricht dadurch wirksamer zu machen; andererseits den Privatfleiß zu weiteren Fortschritten zu ermuntern, ihm ein Buch zur zweckmäßigen Beschäftigung darzubieten, um das Erlernte anwenden zu können; denn jeder Unterricht muß, wenn er anders wirksam seyn soll, durch Privatfleiß unterstützt werden.

Um diesem doppelten Zwecke zu entsprechen, hat der Verfasser geglaubt, dieser Sammlung eine größere Ausdehnung geben zu müssen, damit sie hinlänglich Material zur Auswahl biete. Eine erschöpfende Darstellung dieses Gegenstandes ist weder zu erwarten, noch zu verlangen, denn sie übersteigt die Kraft des menschlichen Geistes. Die Erfindungskraft des Menschen wird nie diejenigen Materien, über welche hier Aufgaben mitgetheilt sind (Dreiecke, Vierecke und Kreise) erforschen, noch weniger wäre ein günstiger Erfolg zu erwarten, wenn er das Fünfeck, Sechseck ꝛc. zum Gegenstand seines Forschens machte. Es muß

genügen, auf einen Weg aufmerksam zu machen, worauf man sich Gewandtheit und Geschicklichkeit im Erfinden und Auflösen der Aufgaben erwerben kann. Alles finden und geben, ist unmöglich.

Die Sammlung beginnt mit den leichtesten und einfachsten Aufgaben über Linien und Winkel im ersten Kapitel. Sie sind meistens als Vorbereitung für das Spätere zu betrachten, und sollen anderseits gleich dem ersten Unterrichte in der Geometrie als Uebungen und Anwendungen beigesellt werden, um die Urtheilskraft zu schärfen, Lust und Liebe zu weitern Fortschritten zu erwecken und dadurch den Unterricht erfolgreich zu machen. Denn Uebung und Anwendung kann nie frühe genug begonnen werden. Diese Umstände werden auch die größere Ausführlichkeit rechtfertigen.

Das zweite Kapitel soll zur Begründung der analytisch-constructionellen Geometrie dienen. Die darin mitgetheilten Lehren scheinen von der Wichtigkeit zu seyn, daß sie wohl in einem eigenen Abschnitte behandelt zu werden verdienen.

Im dritten Kapitel sind unter den Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck, bei deren Construction Winkel vorkommen, §. 197 — 206. nur solche gegeben, wobei der Scheitelwinkel vorkommt. Hierauf lassen sich die Fälle, wenn der Winkel an der Grundlinie gegeben ist, leicht zurückführen.

Den Punkt glaubt der Verfasser keineswegs unberührt lassen zu dürfen, daß die Bearbeitung geometrischer Aufgaben keineswegs ohne wissenschaftlichen Werth ist. Jede Auffindung einer neuen geometrischen Aufgabe ist zugleich die Begründung eines neuen Lehrsatzes über die Congruenz zweier Figuren, in denen die Elemente, woraus die Figur construirbar ist, einander gleich sind, denn es fließt aus der Construction unmittelbar der Schluß: daß aus den nämlichen Elementen wohl unzählige

Mal die gesuchte Figur gebildet werden könne, daß sie aber immer eine und dieselbe seyn müsse.

Zugleich folgt hieraus: daß die Auflösung einer geometrischen Aufgabe ein synthetischer Beweis für die Congruenz zweier Figuren unter gegebenen Bedingungen sey. Diese Behauptungen gelten jedoch nur von den s. g. bestimmten Aufgaben und dehnen sich nicht auf die Aufgaben, welche unbestimmt sind, aus.

Macht man von diesen Bemerkungen auf einzelne Fälle Anwendung, so erhält man z. B. unmittelbar folgende Lehrsätze:

1) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn in beiden die Hypotenuse und die Summe, oder der Unterschied der Katheten gleich ist, §. 123 und 131.
2) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Summen, welche die Hypotenuse mit jeder Kathete bildet, in beiden gleich sind, §. 151.
3) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn Umfang und Höhe in beiden gleich ist, §. 180.
4) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn in beiden Höhe und die Summe der Grundlinie und des Schenkels gleich sind, §. 191. u. s. w.
5) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind aber nur in bestimmten Fällen congruent, wenn der Schenkel und die Summe der Höhe und Grundlinie in beiden gleich ist, §. 195.

Die Anzahl dieser Lehrsätze läßt sich leicht weiter ausdehnen. Sie selbst sind als ein Beitrag zu der Lehre von der Congruenz der Figuren immer von wissenschaftlichem Werthe, obgleich dieser Gegenstand in den meisten Lehrbüchern der Geometrie nur spärlich behandelt und nur auf die ersten Prinzipien ausgedehnt wird.

Diesen einleitenden Bemerkungen zufolge wünscht der Verfasser die vorliegende Sammlung als einen Versuch, Lehrern und Lernenden nützlich zu seyn, beurtheilt zu sehen. Möge sie mit eben so vielem Interesse für die Wissenschaft aufgenommen werden, als sie mit Liebe für dieselbe geschrieben ward.

Noch ist die Güte meiner Freunde, des Herrn Domänenrathes Regenauer und Herrn Baurathes Dittler in Karlsruhe, zu erwähnen, die mir zu diesem Werke sehr schätzbare Beiträge lieferten, und von denen mir der Erstere eine Sammlung von ungefähr 150 — 180 schon geordneter Aufgaben und ihre Auflösungen mittheilte, die ich am gehörigen Orte aufgenommen habe.

Schließlich erlaube ich mir noch, die Literatur anzuzeigen, die mir über geometrische Aufgaben zu Gebote stand, ob ich sie gleich nach der Anlage des Ganzen nicht immer benutzen konnte. Ich glaube, daß diese Mittheilung manchem Leser angenehm seyn wird, zumal man sich hieraus überzeugen kann, was schon früher geleistet war und was davon in diese Sammlung aufgenommen wurde.

Praktische Uebungen für angehende Mathematiker von Dr. E. S. Unger; 2 Bände. Leipzig 1828 und 29.

Der 1te Bend enthält: das Berechnen, Verwandeln und Theilen der Figuren.

Der 2te Band: die Lehre vom Kreise mit einer Sammlung von Aufgaben.

L. Mascheroni's Gebrauch des Zirkels, ins Deutsche übersetzt von J. P. Grüson, mit einer Sammlung Aufgaben. Berlin 1825.

Lehrbuch der Geometrie für das Geschäftsleben von G. A. Fischer; 2te Auflage. Dresden 1829.

Lehrbuch der Geometrie von D. C. L. Lehmus. Berlin 1826.

Sammlung von Beispielen, Aufgaben und Lehrsätzen aus der Arithmetik, Algebra, Geometrie und ebenen Trigonometrie von D. C. L. Lehmus. Berlin 1820.

Baryecentrischer Calcul von A. F. Möbius. Leipzig 1827.

Geometrische Analysis von Joh. Leslie; aus dem Englischen übersetzt von J. P. Grüson. Berlin 1822.

Geometrie der Stellung von Carnot; übersetzt von Schumacher; 2 Bde. Altona 1810.

Lehrbuch der Geometrie von W. A. Förstemann; 2 Bde. Danzig 1827.

System der Erzeugung, Verwandlung und Theilung geometrischer Figuren v. M. G. Grabow. Frankfurt am Main 1828.

Lehrbuch der Geometrie von R. Unruh. München 1824.

Appollonius von Pergä ebene Oerter, wieder hergestellt von R. Simson. Uebersetzt von J. W. Cammerer. Leipzig 1796.

Geometrische Aufgaben von A. Richter; 1ter Theil. Lawsons Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck. Halberstadt 1829.

Geometrische Aufgaben nach der Methode der Griechen, von Dr. A. W. Diesterweg.

1te Sammlung. Berlin 1825.

2te " " Elberfeld 1828.

Die Bücher des Apollonius von Perga de sectione determinata, wieder hergestellt von R. Simson; nach dem Lateinischen frei bearbeitet von Dr. W. A. Diesterweg. Bonn 1822.

Beiträge zur Lehre von den positiven und negativen Größen von Dr. W. A. Diesterweg. Bonn 1831.

Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch; 2 Thle. Berlin 1805 und 1807.

Sammlung interessanter geometrischer Lehrsätze und Aufgaben von Fr. Ottemann. Leipzig 1824.

Mathematische Uebungsaufgaben von F. W. D. Snell. Gießen 1810.

Aufgaben über Dreiecke von J. Fr. Kroll. Halle 1826.

Lehrbuch über die vornehmsten Aufgaben aus der Ebenen- und Körpergeometrie von Dr. A. Hr. Chr. Gelpke. Leipzig 1818.

Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Pergä von den Berührungen, von Dr. C. G. Haumann. Breslau 1817.

Sammlung verschiedener Aufgaben der Geometrie von L. Pouissant, aus dem Französischen übersetzt von E. M. Hahn. Berlin 1806.

Geometrische Aufgaben von J. F. Schaffer. Oldenburg 1816.

Sätze und Aufgaben aus der ebenen Geometrie, nach der Methode der Alten; 2te Sammlung; von J. Niefert. Coesfeld 1820.

Sammlung neuer mathematischer Aufgaben von A. von Forstner. Berlin 1819.

Aufgaben zur Uebung der Analysis von J. A. Eitelwein. Berlin 1793.

Aufgaben über das gradlinigte Dreieck von F. Strehlke. Königsberg 1827.

Reine Elementar-Mathematik von Dr. M. Ohm; 2ter Band. Berlin 1826.

Vollständiges Lehrbuch der reinen Elementar-Mathematik von F. A. Hegenberg; 2ter Theil. Berlin 1826.

Universal arithmetick written in Latin by Sir Isaac Newton, translated by Ralphson. London 1769. (Das Lateinische Original stand mir nicht zu Gebot.)

Recueil de Problèmes résolus par de considérations purement géomètriques. Paris chez Courcier 1809.

Cours complet de Géométrie par N. J. Didier. Paris 1828.

Die trefflichen Werke von Carnot, Leslie, Möbius, Mascheroni, Lehmus, Ohm, Diesterweg, Förstemann, Richter u. s. w. werden vielen Stoff zu weiteren Untersuchungen bieten.

Heidelberg, im Oktober 1831.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erſtes Kapitel.

Aufgaben über Linien und Winkel, und über die Verbindung beider miteinander.

Zweites Kapitel.

Geometriſche Conſtruction algebraiſcher Formeln.

Drittes Kapitel.

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.

Viertes Kapitel.

Aufgaben über das gleichſchenklige und gleichſeitige Dreieck.

Erstes Kapitel.

Aufgaben über Linien und Winkel, und über die Verbindung beider miteinander.

§. 1 — 73., Pag. 1 — 86.

1. Aus drei gegebenen Linien ein Dreieck zu zeichnen, §. 1.
2. Aus zwei gegebenen Linien ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, §. 2.
3. Aus einer Linie ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, §. 3.
4. Einen gegebenen Winkel an einen bestimmten Punkt anzutragen, §. 4.
5. Eine oder mehrere Linien mit einer gegebenen durch einen oder mehrere Punkte parallel zu ziehen, §. 5.
6. Auf eine gegebene Linie von einem Punkte ausserhalb derselben eine senkrechte Linie zu fällen, §. 6.
7. Auf einen in einer Linie gegebenen Punkt eine senkrechte Linie zu errichten, §. 7.
8. An dem Endpunkte einer gegebenen Linie eine senkrechte Linie zu errichten, §. 8.
9. Eine gegebene Linie in zwei gleiche Theile zu theilen, §. 9.
10. Eine gegebene Linie von einem gegebenen Punkte ausserhalb derselben in zwei gleiche Theile zu theilen, §. 10.
11. Eine gegebene Linie in drei oder mehr gleiche Theile zu theilen, §. 11.
12. Eine Linie in zwei oder mehrere Theile nach unter sich gegebenen Verhältnissen zu zerlegen, §. 12.
13. Die Größe einer Linie zu bestimmen, welche der $\frac{m}{n}$te Theil einer gegebenen seyn soll, §. 13.
14. Es sind zwei Linien gegeben. Man soll zwei andere Linien finden, welche mit der gegebenen die innern oder äussern Glieder einer geometrischen Proportion bilden, §. 14.
15. Zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionale zu finden, §. 15.

16. Zu zwei gegebenen Linien die dritte geometrische Proportionale zu finden, §. 16.

17. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionale zu finden, §. 17.

18. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere arithmetische Proportionale zu finden, §. 18.

19. Zur Summe und Differenz zweier Linien die mittlere geometrische Proportionale zu finden, §. 19.

20. Es ist eine Linie gegeben und zwei Punkte ausserhalb derselben. Man soll einen Punkt in der Linie angeben, welcher von beiden Punkten gleich weit absteht, §. 20.

21. Es ist eine Linie und ausserhalb derselben sind zwei Punkte gegeben. Man soll von den beiden Punkten zwei Linien mit einander parallel auf die gegebene Linie ziehen, daß die Summe beider dem Abstande beider Punkte von einander gleich sey, §. 31.

22. Es ist eine Linie und ausserhalb derselben sind zwei Punkte gegeben. Man soll von beiden Punkten zwei mit einander parallel laufende Linien auf die gegebene ziehen, daß ihre Summe dreimal so groß, als die Entfernung beider Punkte von einander ist, §. 22.

23. u. 24. Es ist eine begrenzte Linie und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine Linie so legen, daß zwei, von den Endpunkten der gegebenen Linie auf jene parallel gezogene, Linien der gegebenen gleich, die eine aber doppelt so groß als die andere sey, oder in einem gegebenen Verhältnisse stehen, §. 23. u. 24.

25. Es ist eine gerade unbegrenzte Linie und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben. Man soll von dem gegebenen Punkte aus eine Linie auf die gegebene so ziehen, daß sie einen bestimmten Winkel mit jener bilde, §. 25.

26. Es ist eine unbegrenzte und eine auf ihr senkrecht stehende begrenzte Linie gegeben. Man soll einen gegebenen Winkel so auf erstere tragen, daß der eine Schenkel in diese falle, der andere den Endpunkt der Senkrechten treffe, §. 26.

27. Es ist eine gerade Linie und ein Punkt ausserhalb derselben gegeben. Man soll zwei gegebene Winkel so auf die Linie tragen, daß sich ihre Schenkel in dem gegebenen Punkte vereinigen, §. 27.

28. Es ist eine Linie und zwei Punkte ausserhalb derselben gegeben. Man soll einen Punkt in der gegebenen Linie so bestimmen, daß zwei von ihm auf die gegebenen Punkte gezogenen Linien zwei gleiche Winkel an der Linie erzeugen, §. 28.

29. Es sind zwei, in einem Punkte sich durchschneidende, Linien und ein Punkt zwischen beiden gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine Linie so legen, daß die Winkel, welche sie mit den beiden Linien macht, einander gleich sind, §. 29.

30. Es ist eine Linie und ausser ihr ein Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie so legen, daß die, von den Endpunkten der gegebenen Linie auf jene gefällten, Senkrechten in bestimmten Entfernungs-Verhältnissen von dem gegebenen Punkte abstehen, §. 30.

31. Es sind zwei unbestimmte Linien ihrer Richtung nach und zwei unbegrenzte Linien gegeben. Man soll einen Punkt zwischen jenen angeben, dessen senkrechter Abstand von beiden den gegebenen begrenzten Linien gleich ist, §. 31.

32. Es sind zwei unbestimmte Linien ihrer Richtung nach und zwei begrenzte Linien gegeben. Man soll einen Punkt ausserhalb beider Linien bestimmen, §. 32.

33. Es sind zwei Linien ihrer Größe und Richtung nach gegeben. Man soll einen Punkt angeben, von wo aus sich mit diesen beiden Linien zwei gleichschenklige Dreiecke beschreiben lassen, §. 33.

34. Es sind zwei Linien ihrer Richtung nach gegeben. Man soll einen Punkt zwischen beiden angeben, von dem aus zwei gegebene Linien mit ihren Endpunkten auf den gegebenen Linien auffallen und zugleich bestimmte Winkel mit ihnen bilden, §. 34.

35. Es sind zwei Linien ihrer Richtung nach gegeben. Man soll zwischen beide eine gegebene Linie so legen, daß sie

Dieſen einleitenden Bemerkungen zufolge wünſcht der Verfaſſer die vorliegende Sammlung als einen Verſuch, Lehrern und Lernenden nützlich zu ſeyn, beurtheilt zu ſehen. Möge ſie mit eben ſo vielem Intereſſe für die Wiſſenſchaft aufgenommen werden, als ſie mit Liebe für dieſelbe geſchrieben ward.

Noch iſt die Güte meiner Freunde, des Herrn Domänenrathes Regenauer und Herrn Baurathes Dittler in Karlsruhe, zu erwähnen, die mir zu dieſem Werke ſehr ſchätzbare Beiträge lieferten, und von denen mir der Erſtere eine Sammlung von ungefähr 150 — 180 ſchon geordneter Aufgaben und ihre Auflöſungen mittheilte, die ich am gehörigen Orte aufgenommen habe.

Schließlich erlaube ich mir noch, die Literatur anzuzeigen, die mir über geometriſche Aufgaben zu Gebote ſtand, ob ich ſie gleich nach der Anlage des Ganzen nicht immer benutzen konnte. Ich glaube, daß dieſe Mittheilung manchem Leſer angenehm ſeyn wird, zumal man ſich hieraus überzeugen kann, was ſchon früher geleiſtet war und was davon in dieſe Sammlung aufgenommen wurde.

Praktiſche Uebungen für angehende Mathematiker von Dr. E. S. Unger; 2 Bände. Leipzig 1828 und 29.

Der 1te Bend enthält: das Berechnen, Verwandeln und Theilen der Figuren.

Der 2te Band: die Lehre vom Kreiſe mit einer Sammlung von Aufgaben.

L. Maſcheroni's Gebrauch des Zirkels, ins Deutſche überſetzt von J. P. Grüſon, mit einer Sammlung Aufgaben. Berlin 1825.

Lehrbuch der Geometrie für das Geſchäftsleben von G. A. Fiſcher; 2te Auflage. Dresden 1829.

Lehrbuch der Geometrie von D. C. L. Lehmus. Berlin 1826.

Sammlung von Beiſpielen, Aufgaben und Lehrſätzen aus der Arithmetik, Algebra, Geometrie und ebenen Trigonometrie von D. C. L. Lehmus. Berlin 1820.

Baryecentrischer Calcul von A. F. Möbius. Leipzig 1827.

Geometrische Analysis von Joh. Leslie; aus dem Englischen übersetzt von J. P. Grüson. Berlin 1822.

Geometrie der Stellung von Carnot; übersetzt von Schumacher; 2 Bde. Altona 1810.

Lehrbuch der Geometrie von W. A. Förstemann; 2 Bde. Danzig 1827.

System der Erzeugung, Verwandlung und Theilung geometrischer Figuren v. M. G. Grabow. Frankfurt am Main 1828.

Lehrbuch der Geometrie von R. Unruh. München 1824.

Appollonius von Pergä ebene Oerter, wieder hergestellt von R. Simson. Uebersetzt von J. W. Cammerer. Leipzig 1796.

Geometrische Aufgaben von A. Richter; 1ter Theil. Lawsons Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck. Halberstadt 1829.

Geometrische Aufgaben nach der Methode der Griechen, von Dr. A. W. Diesterweg.

1te Sammlung. Berlin 1825.

2te " " Elberfeld 1828.

Die Bücher des Apollonius von Perga de sectione determinata, wieder hergestellt von R. Simson; nach dem Lateinischen frei bearbeitet von Dr. W. A. Diesterweg. Bonn 1822.

Beiträge zur Lehre von den positiven und negativen Größen von Dr. W. A. Diesterweg. Bonn 1831.

Sammlung geometrischer Aufgaben von Meier Hirsch; 2 Thle. Berlin 1805 und 1807.

Sammlung interessanter geometrischer Lehrsätze und Aufgaben von Fr. Ottemann. Leipzig 1824.

Mathematische Uebungsaufgaben von F. W. D. Snell. Gießen 1810.

Aufgaben über Dreiecke von J. Fr. Kroll. Halle 1826.

Lehrbuch über die vornehmsten Aufgaben aus der Ebenen- und Körpergeometrie von Dr. A. Hr. Chr. Gelpke. Leipzig 1818.

Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Pergä von den Berührungen, von Dr. C. G. Haumann. Breslau 1817.

Sammlung verschiedener Aufgaben der Geometrie von L. Pouissant, aus dem Französischen übersetzt von E. M. Hahn. Berlin 1806.

Geometrische Aufgaben von J. F. Schaffer. Oldenburg 1816.

Sätze und Aufgaben aus der ebenen Geometrie, nach der Methode der Alten; 2te Sammlung; von J. Niefert. Coesfeld 1820.

Sammlung neuer mathematischer Aufgaben von A. von Forstner. Berlin 1819.

Aufgaben zur Uebung der Analysis von J. A. Eitelwein. Berlin 1793.

Aufgaben über das gradlinigte Dreieck von F. Strehlke. Königsberg 1827.

Reine Elementar-Mathematik von Dr. M. Ohm; 2ter Band. Berlin 1826.

Vollständiges Lehrbuch der reinen Elementar-Mathematik von F. A. Hegenberg; 2ter Theil. Berlin 1826.

Universal arithmetick written in Latin by Sir Isaac Newton, translated by Ralphson. London 1769. (Das Lateinische Original stand mir nicht zu Gebot.)

Recueil de Problèmes résolus par de considérations purement géomètriques. Paris chez Courcier 1809.

Cours complet de Géométrie par N. J. Didier. Paris 1828.

Die trefflichen Werke von Carnot, Leslie, Möbius, Mascheroni, Lehmus, Ohm, Diesterweg, Förstemann, Richter u. s. w. werden vielen Stoff zu weiteren Untersuchungen bieten.

Heidelberg, im Oktober 1831.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erſtes Kapitel.

Aufgaben über Linien und Winkel, und über die Verbindung beider miteinander.

Zweites Kapitel.

Geometriſche Conſtruction algebraiſcher Formeln.

Drittes Kapitel.

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.

Viertes Kapitel.

Aufgaben über das gleichſchenklige und gleichſeitige Dreieck.

Erſtes Kapitel.

Aufgaben über Linien und Winkel, und über die Verbindung beider miteinander.

§. 1 — 73., Pag. 1 — 86.

1. Aus drei gegebenen Linien ein Dreieck zu zeichnen, §. 1.
2. Aus zwei gegebenen Linien ein gleichſchenkliges Dreieck zu zeichnen, §. 2.
3. Aus einer Linie ein gleichſeitiges Dreieck zu zeichnen, §. 3.
4. Einen gegebenen Winkel an einen beſtimmten Punkt anzutragen, §. 4.
5. Eine oder mehrere Linien mit einer gegebenen durch einen oder mehrere Punkte parallel zu ziehen, §. 5.
6. Auf eine gegebene Linie von einem Punkte auſſerhalb derſelben eine ſenkrechte Linie zu fällen, §. 6.
7. Auf einen in einer Linie gegebenen Punkt eine ſenkrechte Linie zu errichten, §. 7.
8. An dem Endpunkte einer gegebenen Linie eine ſenkrechte Linie zu errichten, §. 8.
9. Eine gegebene Linie in zwei gleiche Theile zu theilen, §. 9.
10. Eine gegebene Linie von einem gegebenen Punkte auſſerhalb derſelben in zwei gleiche Theile zu theilen, §. 10.
11. Eine gegebene Linie in drei oder mehr gleiche Theile zu theilen, §. 11.
12. Eine Linie in zwei oder mehrere Theile nach unter ſich gegebenen Verhältniſſen zu zerlegen, §. 12.
13. Die Größe einer Linie zu beſtimmen, welche der $\frac{m}{n}$te Theil einer gegebenen ſeyn ſoll, §. 13.
14. Es ſind zwei Linien gegeben. Man ſoll zwei andere Linien finden, welche mit der gegebenen die innern oder äuſſern Glieder einer geometriſchen Proportion bilden, §. 14.
15. Zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionale zu finden, §. 15.

16. Zu zwei gegebenen Linien die dritte geometrische Proportionale zu finden, §. 16.

17. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportionale zu finden, §. 17.

18. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere arithmetische Proportionale zu finden, §. 18.

19. Zur Summe und Differenz zweier Linien die mittlere geometrische Proportionale zu finden, §. 19.

20. Es ist eine Linie gegeben und zwei Punkte ausserhalb derselben. Man soll einen Punkt in der Linie angeben, welcher von beiden Punkten gleich weit absteht, §. 20.

21. Es ist eine Linie und ausserhalb derselben sind zwei Punkte gegeben. Man soll von den beiden Punkten zwei Linien mit einander parallel auf die gegebene Linie ziehen, daß die Summe beider dem Abstande beider Punkte von einander gleich sey, §. 31.

22. Es ist eine Linie und ausserhalb derselben sind zwei Punkte gegeben. Man soll von beiden Punkten zwei mit einander parallel laufende Linien auf die gegebene ziehen, daß ihre Summe dreimal so groß, als die Entfernung beider Punkte von einander ist, §. 22.

23. u. 24. Es ist eine begrenzte Linie und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine Linie so legen, daß zwei, von den Endpunkten der gegebenen Linie auf jene parallel gezogene, Linien der gegebenen gleich, die eine aber doppelt so groß als die andere sey, oder in einem gegebenen Verhältnisse stehen, §. 23. u. 24.

25. Es ist eine gerade unbegrenzte Linie und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben. Man soll von dem gegebenen Punkte aus eine Linie auf die gegebene so ziehen, daß sie einen bestimmten Winkel mit jener bilde, §. 25.

26. Es ist eine unbegrenzte und eine auf ihr senkrecht stehende begrenzte Linie gegeben. Man soll einen gegebenen Winkel so auf erstere tragen, daß der eine Schenkel in diese falle, der andere den Endpunkt der Senkrechten treffe, §. 26.

27. Es ist eine gerade Linie und ein Punkt ausserhalb derselben gegeben. Man soll zwei gegebene Winkel so auf die Linie tragen, daß sich ihre Schenkel in dem gegebenen Punkte vereinigen, §. 27.

28. Es ist eine Linie und zwei Punkte ausserhalb derselben gegeben. Man soll einen Punkt in der gegebenen Linie so bestimmen, daß zwei von ihm auf die gegebenen Punkte gezogenen Linien zwei gleiche Winkel an der Linie erzeugen, §. 28.

29. Es sind zwei, in einem Punkte sich durchschneidende, Linien und ein Punkt zwischen beiden gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine Linie so legen, daß die Winkel, welche sie mit den beiden Linien macht, einander gleich sind, §. 29.

30. Es ist eine Linie und ausser ihr ein Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie so legen, daß die, von den Endpunkten der gegebenen Linie auf jene gefällten, Senkrechten in bestimmten Entfernungs-Verhältnissen von dem gegebenen Punkte abstehen, §. 30.

31. Es sind zwei unbestimmte Linien ihrer Richtung nach und zwei unbegrenzte Linien gegeben. Man soll einen Punkt zwischen jenen angeben, dessen senkrechter Abstand von beiden den gegebenen begrenzten Linien gleich ist, §. 31.

32. Es sind zwei unbestimmte Linien ihrer Richtung nach und zwei begrenzte Linien gegeben. Man soll einen Punkt ausserhalb beider Linien bestimmen, §. 32.

33. Es sind zwei Linien ihrer Größe und Richtung nach gegeben. Man soll einen Punkt angeben, von wo aus sich mit diesen beiden Linien zwei gleichschenklige Dreiecke beschreiben lassen, §. 33.

34. Es sind zwei Linien ihrer Richtung nach gegeben. Man soll einen Punkt zwischen beiden angeben, von dem aus zwei gegebene Linien mit ihren Endpunkten auf den gegebenen Linien auffallen und zugleich bestimmte Winkel mit ihnen bilden, §. 34.

35. Es sind zwei Linien ihrer Richtung nach gegeben. Man soll zwischen beide eine gegebene Linie so legen, daß sie

mit ihren Endpunkten auf beide Linien falle und mit der einen einen bestimmten Winkel bilde, §. 35.

36. Es sind drei Linien gegeben. Man soll sie an einem Punkte unter solchen Winkeln zusammenstellen, daß ihre Endpunkte in einer geraden Linie liegen und gleich weit von einander abstehen, §. 36.; oder

37. in einem gegebenen Verhältnisse von einander abstehen, §. 37.

38. Einen Winkel in zwei gleiche Theile theilen, §. 38.

39. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile theilen, §. 39.

40. Einen gegebenen Winkel zu verdoppeln, §. 40.

41. Einen Winkel, der nicht größer als die Hälfte eines Rechten ist, zu verdreifachen, §. 31.

42. Einen Winkel, der nicht größer als die Hälfte eines Rechten ist, um das Fünffache zu vergrößern, §. 42.

43. Einen Winkel, der nicht größer als die Hälfte eines Rechten ist, um die Hälfte zu vergrößern, §. 43.

44. Es ist ein Winkel gegeben. Man soll einen Punkt bestimmen, der mit zwei von ihm aus, auf die Endpunkte der Schenkel des gegebenen Winkels, gezogenen Linien, einen Winkel erzeuge, welcher doppelt so groß, als der gegebene ist, §. 44.

45. Es ist ein Winkel und eine Linie gegeben. Man soll die Linie so zwischen seine Schenkel legen, daß ihre Endpunkte in dieselben fallen und sie gleiche Stücke von den Schenkeln abschneide, §. 45.

46. Es ist ein Winkel und eine Linie gegeben. Man soll die gegebene Linie so zwischen seine Schenkel legen, daß ihre Endpunkte in dieselben fallen und sie mit dem einen einen gegebenen Winkel bilde, §. 46.

47. Es ist ein Winkel und ein Punkt zwischen seinen Schenkeln gegeben. Man soll eine Linie durch diesen Punkt so zwischen beide Schenkel legen, daß die Zwischenlinie durch diesen Punkt in zwei gleiche Theile getheilt wird, §. 47., oder

48. daß die Zwischenlinie durch diesen Punkt nach einem gegebenen Verhältniß getheilt wird, §. 48.

49. Es ist ein Winkel und ein Punkt zwischen seinen Schenkeln gegeben. Man soll von diesem Punkte zwei Linien auf die Schenkel des Winkels fällen, daß sie in einem bestimmten Verhältnisse stehen, und die eine mit dem Schenkel, worauf sie auffällt, einen bestimmten Winkel bilde, §. 49.

50. Es ist ein Winkel und ausserhalb seiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man soll von diesem Punkte eine, die beiden Schenkel durchschneidende, Linie legen, daß die Entfernung zwischen dem gegebenen Punkte und dem einen Schenkel, der Zwischenlinie zwischen beiden Schenkeln gleich sey, oder in einem gegebenen Verhältniß stehe, §. 50.

51. Es ist ein Winkel und ausserhalb seiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man soll von dem gegebenen Punkte eine Linie auf den einen Schenkel, von diesem eine zweite auf den andern Schenkel fällen, daß beide hiedurch entstandene Linien in einem gegebenen Verhältnisse stehen, und letztere unter einem gegebenen Winkel auf dem zweiten Schenkel auffalle, §. 51.

52. Es ist ein Winkel und ausserhalb seiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man soll von diesem Punkte zwei Linien auf die beiden Schenkel des Winkels ziehen, daß sie in einem gegebenen Verhältnisse unter einander stehen und die eine unter einem bestimmten Winkel auffalle, §. 52.

53. Es ist ein Winkel und zwischen seinen Schenkeln ein Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine Linie so legen, daß sie auf beiden Schenkeln des Winkels gleiche Stücke abschneide, § 53.

54. Es sind zwei sehr wenig convergirende, also einen sehr spitzen Winkel bildende, Linien und auf einer derselben ein Punkt gegeben. Man soll auf der andern einen Punkt bestimmen, der eben so weit von dem Vereinigungspunkt beider Linien liegt, als der gegebene, §. 54.

55. Es ist die Richtung der zwei Schenkel eines Winkels gegeben. Man soll zwischen beide Schenkel eine Linie so legen, daß sie, genugsam verlängert, durch den Vereinigungspunkt beider Schenkel geht, §. 55.

56. Es ist die Richtung der zwei Schenkel eines Winkels und ein Punkt zwischen beiden gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine Linie so legen, daß sie, hinlänglich verlängert, durch den Vereinigungspunkt der Schenkel geht, §. 56.

57. Es ist die Richtung der zwei Schenkel eines sehr spitzen Winkels und ausserhalb beider ein Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine Linie so legen, daß sie, hinlänglich verlängert, durch den Vereinigspunkt der beiden Linien geht, §. 57.

58. Es ist eine Linie und ein Winkel gegeben. Man soll über der gegebenen Linie einen Winkel construiren, der dem gegebenen gleich und mit seinen Schenkeln auf den Endpunkten der Linie aufsteht, §. 58.

59. Es ist eine Linie, ein Winkel und ein Schenkel dieses Winkels gegeben. Man soll den gegebenen Winkel über der Linie so antragen, daß der Winkel den gegebenen Schenkel enthalte und mit seinen Schenkeln auf den Endpunkten der gegebenen Linie aufsteht, §. 59.

60. Es ist ein Winkel und eine Linie gegeben. Man soll die Linie so zwischen die beiden Schenkel des Winkels antragen, daß ihre Endpunkte in dieselben fallen und sie mit einer durch die beiden Endpunkte gelegten geraden Linie parallel läuft, §. 60.

61. Es ist eine Linie und ausser ihr ein Punkt gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine Linie so legen, daß die Summe zweier von den Endpunkten der gegebenen Linie gefällten Perpendikel der gegebenen Linie selbst gleich sey, §. 61.

62. Es ist eine Linie und ausser ihr ein Punkt gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine Linie dergestalt legen, daß die genannte Summe zwei Drittheile, oder $\frac{n}{m}$ von der gegebenen Linie betrage, §. 62.

63. Es sind drei Punkte gegeben. Man soll einen vierten so bestimmen, daß die von ihm auf die gegebenen Punkte gezogenen Linien bestimmte Winkel bilden, §. 63.

64. Es sind drei Punkte gegeben. Man soll einen vierten so bestimmen, daß er von jedem der gegebenen gleich weit abstehe, §. 64.

65. Es ist eine Linie und auffer ihr sind zwei Punkte gegeben. Man soll in der Linie einen Punkt bestimmen, welcher mit der gegebenen Linie und mit beiden Punkten zwei gleiche Winkel bilde, §. 65.

66. Von drei Linien, welche in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, ist die Summe der beiden äussern und die Summe der einen äussern und der mittlern gegeben. Man soll die Linie finden, §. 66.

67. Von drei Linien, die in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, ist die mittlere und der Unterschied zwischen den beiden äussern gegeben. Man soll die beiden äussern finden, §. 67.

68. Von drei Linien, die in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, ist die eine äussere und die Summe der mittlern und andern äussern gegeben. Man soll die mittlere und andere äussere finden, §. 68.

69. Von drei Linien, die in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, ist die eine äussere und der Unterschied zwischen der mittlern und andern äussern gegeben. Man soll die beiden letztern darstellen, §. 69.

70. Es ist der Unterschied zweier Linien und das Verhältniß, worin sie zu einander stehen, gegeben, Man soll die beiden Linien finden, §. 70.

71. Es sind zwei Parallel-Linien und zwischen beiden ein Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt zwischen beide Parallelen eine Linie so legen, daß der Abstand des Punktes von der einen um eine bestimmte Linie größer ist, als der von der andern, §. 71.

72. Von drei Linien, welche in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, kennt man die Summe, welche die mittlere Proportionale mit den beiden äussern bildet. Man soll die Linien finden, §. 72.

73. Von drei Linien, die in einer ſtetigen geometriſchen Proportion ſtehen, iſt der Unterſchied zwiſchen der größern und mittlern und zwiſchen der mittlern und kleinern gegeben. Man ſoll die Linien finden, §. 73.

Zweites Kapitel.

Geometriſche Conſtruction algebraiſcher Formeln.

§. 74 — 113., Pag. 87 — 142.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck bilden, wenn die beiden Katheten gegeben ſind, §. 74.
2. Ein rechtwinkliges Dreieck bilden, wenn die Hypotenuſe und eine Kathete gegeben iſt, §. 75.
3. Ein Dreieck bilden, wenn die zwei, einen ſpitzen Winkel eines Dreiecks umſchließenden, Seiten und der Abſchnitt, welchen die, von dem Endpunkte der einen Seite auf die gegenüberſtehende Seite, gefällte Höhe macht, gegeben iſt, §. 76.
4. Ein Dreieck bilden, wenn die zwei, den ſtumpfen Winkel eines Dreiecks umſchließenden, Seiten und die Verlängerung der einen, welche durch die von dem Endpunkte der andern auf jene gefällte Höhe entſteht, gegeben iſt, §. 77.

Man ſoll conſtruiren:

5. die Formel $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ §. 78.
6. die Formel $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ §. 79.
7. die Formel $x = \frac{a \cdot b}{c}$ §. 80.
8. die Formel $x = \sqrt{a \cdot b}$ §. 81.
9. die Formel $x = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ad}$ §. 82.
10. die Formel $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ad}$ §. 83.
11. die Formel $x = \sqrt{2a^2}$ oder: ein Quadrat zu verdoppeln, §. 84.

12. Man ſoll die Formel conſtruiren $x = \sqrt{3a^2}$ oder ein Quadrat verdreifachen, §. 85.

Bemerkungen über die Conſtruction ſolcher Formeln, die unter dem Wurzelzeichen große Zahlencoefficienten haben, §. 86 — 88.

13. Man ſoll die Formel conſtruiren $x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$, oder die Hälfte eines Quadrates ſuchen, §. 89.

14. Man ſoll die Formel conſtruiren $x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, oder ein Drittel eines Quadrates ſuchen, §. 90.

Bemerkungen über die Conſtruction allgemeiner hierher gehöriger Formeln, §. 90.

Man ſoll conſtruiren:

15. die Formal $x = \sqrt{\frac{2}{3}a^2}$ §. 91.

16. die Formel $x = \sqrt{\frac{m}{n}a^2}$ §. 92.

Bemerkungen über die gegebenen Methoden, §. 93.

17. die Formel $x = \sqrt{a^2 + bc}$ §. 94.

18. die Formel $x = a + \sqrt{b^2 - \frac{cde}{f}}$ §. 95.

19. die Formel $x = \frac{a^2 - b^2}{a}$ §. 96.

20. die Formel $x = \sqrt{a^2 + b^2 + 2b\sqrt{(c^2 + d^2)}}$ §. 97.

Allgemeine Bemerkungen über die Conſtruction algebraiſcher Formeln, §. 98 — 104.

21. die Formel $\frac{a^3 - b^3}{c}$ §. 101.

22 die Formel $\sqrt{\frac{a^4 - b^4}{b^2 + c^2}}$ §. 102.

23. die Formel $\sqrt{a^2 + \sqrt{(b^4 + c^4)}}$ §. 103.

24. die Formel $\sqrt{a^2 + \sqrt{\left(\frac{b^6 + c^6}{e^2}\right)}}$ §. 104.

Bemerkungen über die verſchiedenen Arten der Auflöſung geometriſcher Aufgaben, §. 105 — 108.

1. Die rein geometriſche.

2. Die analytisch-constructionelle oder auch analytische.
3. Die algebraische Auflösung.
Ihr Wesen und Begriff, §. 105 und 106.
Auffindung der Constructionsarten, §. 107.
Vergleichung der Constructions-Methoden, §. 108.
Bemerkungen über die Ausführung der Construction einer Formel, §. 109 — 113.
Einfache und zusammengesetzte Construction, §. 109.
Ueber die Ausführung der einfachen Construction, §. 110.
Ueber die Ausführung der zusammengesetzten Construction, §. 111.
Erläuterung, §. 112 und 113.

Drittes Kapitel.

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.

§. 114 — 182., Pag. 143 — 250.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:
1. die Hypotenuse und die Höhe, §. 115.
2. Die beiden Abschnitte, §. 116.
3. Die Höhe und der eine Abschnitt der Hypotenuse, §. 117.
4. Unterschied der beiden Abschnitte und die Höhe, §. 118.
5. Höhe und eine Kathete, §. 119.
6. Ein Abschnitt und die ihm anliegende Kathete, §. 120.
7. Eine Kathete und der an der andern liegende Abschnitt, §. 121.
8. Die kleinere Kathete und der Unterschied der beiden Abschnitte, §. 122.
9. Die größere Kathete und der Unterschied der beiden Abschnitte, §. 123.
10. Hypotenuse und Summe der beiden Katheten, §. 124.
11. Hypotenuse und Summe der einen Kathete und des anliegenden Abschnittes, §. 125.
12. Hypotenuse und die Summe der Quadrate der einen Kathete und des anliegenden Abschnittes, §. 125.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

13. Hypotenuse und die Summe der Höhe und des kleinern Abschnittes, §. 127.
14. Hypotenuse und die Summe der Höhe und des größern Abschnittes, §. 128.
15. Hypotenuse und Summe der einen Kathete und des, an der andern liegenden, Abschnittes, §. 129.
16. Hypotenuse und die Summe der Quadrate der einen Kathete und des, an der andern liegenden, Abschnittes, §. 130.
17. Hypotenuse und der Unterschied beider Katheten, §. 131.
18. Hypotenuse und der Unterschied der Quadrate der beiden Katheten, §. 132.
19. Hypotenuse und der Unterschied zwischen der Höhe und dem größern Abschnitte, §. 133.
20. Hypotenuse und der Unterschied zwischen der Höhe und dem kleinern Abschnitte, §. 134.
21. Hypotenuse und der Unterschied zwischen dem Quadrate der Höhe und des kleinern Abschnittes, §. 135.
22. Hypotenuse und der Unterschied zwischen dem Quadrate der Höhe und des größern Abschnittes, §. 135.
23. Hypotenuse und der Ueberschuß der größern Kathete über den nicht anliegenden Abschnitt, §. 136.
24. Hypotenuse und der Ueberschuß des größern Abschnittes über die kleinere Kathete und umgekehrt, §. 136.
25. Hypotenuse und der Unterschied zwischen den Quadraten der größern Kathete und des nicht anliegenden Abschnittes, §. 137.
26. Hypotenuse und der Unterschied zwischen den Quadraten der kleinern Kathete und des größern Abschnittes, §. 137.
27. Hypotenuse und der Unterschied zwischen der Kathete und dem anliegenden Abschnitte, §. 138.
28. Eine Kathete und die Summe der Hypotenuse und andern Kathete, §. 138.
29. Eine Kathete und die Summe des Quadrates der Hypotenuse und der andern Kathete, §. 140.
30. Eine Kathete und der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der andern Kathete, §. 141.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

31. Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und Summe der beiden Katheten, §. 142.
32. Hypotenuse und das Summenquadrat der Hypotenuse und einen Kathete, §. 143.
33. Unterschied der Hypotenuse und einen Kathete und die Summe der beiden Katheten, §. 144.
34. Summe der Hypotenuse und der größern Kathete und der Unterschied zwischen beiden Katheten, §. 145.
35. Summe der Hypotenuse und der kleinern Kathete und der Unterschied zwischen beiden Katheten, §. 145.
36. Summe der Hypotenuse und der größern Kathete und der Unterschied der Quadrate beider Katheten, §. 146.
37. Summe der Hypotenuse und kleinern Kathete und der Unterschied der Quadrate beider Katheten, §. 146.
38. Summe der Quadrate der Hypotenuse und der größern Kathete und der Unterschied der Kathetenquadrate, §. 147.
39. Summe der Quadrate der Hypotenuse und kleinern Kathete und der Unterschied der Kathetenquadrate, §. 147.
40. Unterschied zwischen der Hypotenuse und größern Kathete und der Unterschied zwischen beiden Katheten, §. 148.
41. Unterschied zwischen der Hypotenuse und kleinern Kathete und der Unterschied zwischen beiden Katheten, §. 148.
42. Unterschied des Quadrates der Hypotenuse und größern Kathete und der beiden Kathetenquadrate, §. 149.
43. Unterschied der Quadrate der Hypotenuse und kleinern Kathete und der zwischen den Kathetenquadraten, §. 150.
44. Summe der Hypotenuse und einen Kathete und die der Hypotenuse und der andern Kathete, §. 151.
45. Summe des Quadrates der Hypotenuse und einen Kathete und die der Hypotenuse und andern Kathete, §. 152.
45. Summe der Hypotenuse und einen Kathete und der Unterschied der Hypotenuse und andern Kathete, §. 153.
47. Summenquadrat der Hypotenuse und einen Kathete und das Unterschiedsquadrat der Hypotenuse und andern Kathete, §. 154.
48. Unterschied der Hypotenuse und einen Kathete und der zwischen der Hypotenuse und andern Kathete, §. 155.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

49. Unterschied der beiden Abschnitte und Summe der beiden Katheten, §. 156.
50. Unterschied dee beiden Abschnitte und Unterschied der beiden Kathet-n, §. 157.
51. Hypotenuse und ein spitzer Winkel, §. 158.
52. Eine Kathete und ein spitzer Winkel, §. 159.
53. Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und der von beiden eingeschlossene spitze Winkel, §. 160.
54. Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und der an der andern Kathete liegende Winkel, §. 161.
55. Unterschied zwischen der Hypotenuse und einen Kathete und der an der andern Kathete liegende Winkel, §. 162.
56. Unterschied zwischen der Hypotenuse und der einen Kathete und der von beiden eingeschlossene Winkel, §. 163.
57. Summe der beiden Katheten und ein spitzer Winkel, §. 164.
58. Unterschied zwischen beiden Katheten und der an der größern Kathete liegende Winkel, §. 165.
59. Unterschied zwischen beiden Katheten und der an der kleinern Kathete liegende Winkel, §. 166.
60. Umfang und ein spitzer Winkel, §. 167.
61. Unterschied zwischen der Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und zwischen der andern Kathete und der, an letzterer liegende, spitze Winkel, §. 158.
62. Unterschied zwischen der Summe der Hypotenuse und einen Kathete und zwischen der andern Kathete und der letzterer gegenüber liegende Winkel, §. 169.
63. Unterschied zwischen der Hypotenuse und der Summe der beiden Katheten und der, an der größern Kathete liegende, spitze Winkel, §. 170.
64. Unterschied zwischen der Hypotenuse und der Summe der Kathete und der an der kleinern Kathete liegende Winkel, §. 170.
65. Unterschied zwischen der Hypotenuse und zwischen der Differenz der beiden Katheten und der an der größern Kathete anliegende Winkel, §. 171.

Ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

66. Unterschied zwischen der Hypotenuse und zwischen der Differenz der Katheten und der, an der kleinern Kathete liegende, Winkel, §. 172.
67. Hypotenuse und das Verhältniß, worin die Höhe zur größern Kathete steht, §. 173.
68. Hypotenuse und das Verhältniß, worin die Höhe zur kleinern Kathete steht, §. 174.
69. Hypotenuse und das Verhältniß, worin die Quadrate der beiden Katheten stehen sollen, §. 175.
70. Hypotenuse und wenn verlangt wird, daß die Quadrate der Katheten und Hypotenuse zu einander in einer arithmetischen Proportion stehen sollen, §. 176.
71. Hypotenuse und wenn verlangt wird, daß die Quadrate der Katheten und Hypotenuse in einer geometrischen Proportion stehen sollen, §. 177.
72. Höhe und das Verhältniß zwischen beiden Katheten, §. 178.
73. Hypotenuse und das Verhältniß zwischen beiden Katheten, §. 179.
74. Umfang und die Höhe, §. 180.
75. Summe der beiden Katheten und Flächeninhalt, §. 181.
76. Umfang und Flächeninhalt, §. 182.

Viertes Kapitel.

Aufgaben über das gleichschenklige und gleichseitige Dreieck.

§. 183 — 232., Pag. 251 — 296.

A. Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck, von §. 183 — 214.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

1. die Grundlinie und Höhe, §. 183.
2. Schenkel und Höhe, §. 184.
3. Grundlinie und der ihr anliegende Winkel, §. 185.
4. Schenkel und der zwischen ihm und der Grundlinie liegende Winkel, §. 186.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

5. der Schenkel und der Scheitelwinkel, §. 187.
6. Grundlinie und Scheitelwinkel, §. 188.
7. Höhe und Winkel an der Grunklinie, §. 189.
8. Scheitelwinkel und Höhe, §. 190.
9. Höhe und Summe des Schenkels und der Grundlinie, §. 191.
10. Höhe und Ueberschuß des Schenkels über der Grundlinie, §. 192.
11. Höhe und Ueberschuß der Grundlinie über dem Schenkel, §. 192.
12. Grundlinie und die Summe der Höhe und des Schenkels, §. 193.
13. Grundlinie und Ueberschuß des Schenkels und der Höhe, §. 194.
14. Schenkel und Summe der Höhe und Grundlinie, §. 195.
15. Schenkel und der Ueberschuß der Höhe über die Grundlinie, §. 196.
16. Schenkel und Ueberschuß der Grundlinie über die Höhe, §. 196. in der Anmerkung Seite XXXII.
17. Scheitelwinkel und die Summe des Schenkels und der Grundlinie, §. 197.
18. Scheitelwinkel und Ueberschuß des Schenkels über die Grundlinie, §. 198.
19. Scheitelwinkel und Ueberschuß der Grundlinie über den Schenkel, §. 199.
20. Scheitelwinkel und Summe des Schenkels und der Höhe, §. 200.
21. Scheitelwinkel und Unterschied zwischen dem Schenkel und der Höhe, §. 201.
22. Scheitelwinkel und Summe der Höhe und Grundlinie, §. 202.
23. Scheitelwinkel und der Ueberschuß der Höhe über die Grundlinie, §. 203.
24. Schenkel und Summe des Scheitelwinkels und des Winkels an der Grundlinie, §. 204.
25. Schenkel und Summe des Scheitelwinkels und des Winkels an der Grundlinie, §. 205.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

26. Höhe und die Summe des Scheitelwinkels und des Winkels an der Grundlinie, §. 206.
27. Summe der Höhe und Grundlinie und die der Höhe und des Schenkels, §. 207.
28. Unterschied zwischen der Höhe und dem Schenkel und der Ueberschuß der Höhe über die Grundlinie, §. 208.
29. Umfang und Höhe, §. 209.
30. Inhalt und Summe der Höhe und Grundlinie, §. 210.
31. Grundlinie und die dem Schenkel zugehörige Höhe, §. 211.
32. Schenkel und die ihm zugehörige Höhe, §. 212.
33. Schenkel und wenn der Winkel an der Grundlinie doppelt so groß, als der an der Spitze werden soll, §. 213.
34. Grundlinie und wenn der Winkel an der Grundlinie doppelt so groß, als der Scheitelwinkel werden soll, §. 214.

B. Aufgaben über das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck.

§. 215 — 228., Pag. 278 — 292.

Ein rechtwinklig-gleichschenklig Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

1. Die Hypotenuse, §. 216.
2. Die eine Kathete, §. 216.
3. Die Höhe, §. 216.
4. Der eine Abschnitt der Hypotenuse, §. 216.
5. Die Summe der Hypotenuse und der Kathete, §. 217.
6. Die Summe des Quadrates der Hypotenuse und Kathete, §. 218.
7. Ueberschuß der Hypotenuse über die Kathete, §. 319.
8. Summe der Hypotenuse und Höhe, §. 220.
9. Summe des Quadrates der Hypotenuse und Höhe, §. 221.
10. Unterschied der Quadrate zwischen der Hypotenuse und Höhe, 222.
11. Summe der einen Kathete und Höhe, §. 223.
12. Summe der einen Kathete und der Höhe, §. 224.
13. Unterschied zwischen der Höhe und Kathete, §. 225.

Ein rechtwinklig-gleichschenklig Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

14. Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, §. 226.
15. Umfang, §. 227.
16. Summe der Quadrate der Umfangslinien, §. 228.

C. Aufgaben über das gleichseitige Dreieck.

§. 229 — 232., Pag. 293 — 296.

Ein gleichseitiges Dreieck zu bilden, wenn gegeben ist:

1. Die Höhe, §. 229.
2. Die Summe der Höhe und Seite, §. 230.
3. Unterschied zwischen der Höhe und Seite, §. 231.
4. Flächeninhalt, §. 232.

Berichtigungen zur ersten Abtheilung.

Seite 48 Zeile 3 von oben lese Fig. 54. statt 52.
— 64 — 18 v. o. l. erhabene st. hohle.
— 69 — 3 v. o. l. Aufgabe st. Aufggbe.
— 159 — 14 v. u. l. $\sqrt{2H^2 - S^2}$ st. $\sqrt{2H^2\,S - ^2}$
— 174 — 15 v. u. l. $\sqrt{H^2 - S^2} = \sqrt{(H+S)\,(H-S)}$
st. $\sqrt{\frac{1}{4}H^2 - H\sqrt{(S^2 - \frac{1}{4}H^2)}}$
— 189 — 8 v. o. l. Analysis st. Aalysis.
— 247 — 16 v. u. l. Kathete st. Kakhete.
— 250 — 11 v. o. l. Lehrsatz st. Lehrsaß.
— 262 — 16 v. o. l. $x + d = \frac{1}{2}d + \frac{2}{3}\sqrt{5k^2 - d^2}$
st. $x + d - \frac{1}{2}d + \frac{2}{3}\sqrt{5k^2 - d^2}$
— 262 — 11 v. u. l. $\alpha = BAC$ st. $x = BAC$.
— 273 — 9 v. o. l. $x = \frac{1}{2}S$ st. $x = \frac{1}{4}S$.
— 291 — 13 v. u. l. einschließenden st. einlchließenden.

Nachträgliche Anmerkungen zur ersten Abtheilung.

Anmerkung zu §. 66. Berührt die Linie BD den Bogen ADC, so ist nur ein Punkt möglich, wo dieß geschehen kann, und folglich auch nur eine Auflösung für den vorgelegten Fall. Durchschneidet aber BD den Bogen ADC, so sind zwei Durchschnittspunkte D und D′ möglich, folglich auch, wie leicht erhellt, zwei Auflösungen, und man hat folgende zwei Proportionen:

$$AE : ED = ED : EC$$

und

$$AE' : E'D' = E'D' : E'C$$

In diesem Falle ist also die Aufgabe unbestimmt.

Anmerkung zu §. 198. Durch eine ähnliche Analysis löst sich die Aufgabe: ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden, wenn der Schenkel und Ueberschuß der Grundlinie über die Höhe gegeben ist.

Anmerkung zu §. 212. Die beiden gegebenen Auflösungen gelten für ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Scheitelwinkel spitz ist. Zieht man durch die Punkte F und A, wie vorhin die Linie FA und macht AB′ = AC und zieht BC, so entsteht das Dreieck AB′C, welches den gegebenen Schenkel und die gegebene Höhe FC = BE hat, und also die Bedingungen der Aufgabe gleichfalls erfüllt und sich von ABC nur dadurch unterscheidet, daß sein Scheitelwinkel stumpf ist. Hieraus folgt, daß die Aufgabe unbestimmt ist, wenn nicht bemerkt wird, ob das Dreieck spitz- oder stumpfwinklig seyn soll.

Die beiden Scheitelwinkel ergänzen sich, wie leicht erhellt, zu 180°. Da BA = AB′, so ist auch

$$\tfrac{1}{2}AB \,.\, FC = \tfrac{1}{2}AB' \,.\, FC$$

und folglich ist der Inhalt zweier gleichschenkligen Dreiecke, die gleiche Schenkel und Scheitelhöhen haben und deren Scheitelwinkel sich zu 180° ergänzen, einander gleich.

Die mitgetheilten Gleichungen gehen für ein stumpfwinkliges gleichschenkliges Dreieck in folgende über

für die Grundlinie

$$x = \sqrt{2k^2 + 2k\sqrt{(k^2 - h^2)}}$$

für die Höhe

$$y = \frac{hk}{x} = \frac{hk}{\sqrt{[2k^2 + 2k\sqrt{(k^2 - h^2)}]}}$$

Erſtes Kapitel.

Aufgaben über Linien und Winkel, und über die Verbindung beider miteinander.

§. 1.

Aufgabe. Aus drei Linien, wovon je zwei immer größer als die dritte sind, ein Dreieck zu bilden. Fig. 1.

Auflösung. Die gegebenen Linien seyen AB, AC, BC. Man betrachte die Linie AB als Grundlinie, beschreibe von dem einen Endpunkte B derselben mit der Linie BC einen Kreisbogen rCt, ebenso von dem andern Endpunkte A mit der Linie AC einen, den vorigen durchschneidenden, Kreisbogen pCq, ziehe von dem Durchschnittspunkte C der beiden Kreisbogen C die Linie CA und CB auf die Endpunkte der Linie AB, so ist das Dreieck ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Die Linie AB ist vermöge der Construction der Linie AB gleich, ebenso ist jede Linie, welche von dem Endpunkte A auf irgend einen Punkt des Kreisbogens pq gezogen wird, der Linie AC, und jede, welche von B auf irgend einen Punkt des Kreisbogens rt gezogen wird, der Linie BC gleich. Der Durchschnittspunkt C ist daher der Vereinigungspunkt für die, den gegebenen gleichen Linien AC und BC. Die drei Linien sind also so mit einander verbunden, daß sie ein Dreieck bilden.

Anmerkung. So wie die Linie AB als Grundlinie angenommen wurde, so hätte auch jede andere als Grundlinie angenommen werden können, wodurch ein Dreieck von einer andern Lage, aber nicht von verschiedener Gestalt oder Größe entstanden wäre. Ebenso hätte umgekehrt die Linie BC an den Endpunkt A, und die

Linie AC an den Endpunkt B der Grundlinie AB gesetzt werden können, ohne daß ein von dem erzeugten verschiedenes Dreieck entstanden wäre. Hieraus ergibt sich also, daß die Verbindung, in welcher die drei Linien unter einander angereiht werden, ganz gleichgültig ist, und daß aus drei Linien wohl mehrere Dreiecke gebildet werden können, die der Lage und Stellung nach unter einander verschieden sind, in Wahrheit aber immer ein und dasselbe Dreieck dargestellt wird, und daß sich also aus drei Linien nur ein mögliches Dreieck bilden läßt.

Die nämliche Bemerkung gilt noch immer, wenn eine Linie, worauf, oder ein Punkt, woran ein schon gegebenes Dreieck getragen werden soll, gegeben ist, oder wenn die drei gegebenen Linien selbst ein Dreieck bilden. Die Aufgabe kann leicht nach dem Gesagten gelöst werden.

§. 2.

Aufgabe. Aus zwei ungleichen Linien ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden. Fig. 2.

Auflösung. Die Linien seyen AB und AC. Man beschreibe von den Endpunkten A und C der als Grundlinie angenommenen Linie AC, mit der Linie AB zwei sich durchschneidende Kreisbogen und ziehe von ihrem Durchschnittspunkte B die Linien AB und BC auf die Endpunkte der Grundlinie AC, so ist das Dreieck ABC das gesuchte.

Beweis. Da von den Endpunkten A und C der Linie AC mit der Linie AB zwei sich durchschneidende Kreisbogen gezogen wurden, so sind alle Linien, die von diesen Punkten auf jene Bogen gezogen werden, sich und der Linie AB gleich, also auch die in dem Punkte B sich vereinigenden Linien AB und BC, und es ist also das Dreieck ABC ein gleichschenkliges Dreieck, das die eine Linie als Grundlinie und die andere als Schenkel hat.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange unbestimmt, als nicht angegeben ist, welche von den gegebenen Linien die Grundlinie und welche die gleichen Schenkel bilden soll, denn alsdann entstehen zwei Dreiecke, welche nicht nur der Lage, sondern auch der Gestalt nach von einander verschieden sind.

Die Aufgabe ist so lange möglich, als die Schenkel-Linie größer, als die Hälfte der Grundlinie ist. Sie ist möglich, wenn letztere kleiner als die Schenkel-Linie ist. Aus zwei ungleich-großen Linien ist also immer wenigstens ein gleichschenkliges Dreieck möglich.

§. 3.

Aufgabe. Es ist eine Linie gegeben. Man soll ein gleichseitiges Dreieck aus ihr bilden. Fig. 3.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AC. Man beschreibe von den beiden Endpunkten der Linie AC mit ihr selbst zwei sich durchschneidende Kreisbogen, und ziehe von ihrem Durchschnittspunkte B zwei Linien auf die Endpunkte der Linie AC, so entsteht das Dreieck ABC, worin die drei Linien einander gleich sind.

§. 4.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel an einen bestimmten Punkt anzutragen. Fig. 4.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC. Der Punkt M. Man schneide von den Schenkeln des Winkels zwei beliebig große Stücke AD, AF ab, und verbinde die Punkte D und F durch eine gerade Linie, wodurch das Dreieck ADF entsteht. Nun lege man in irgend einer Richtung durch den Punkt M eine gerade Linie und trage einen der beiden Schenkel AD = MD an denselben, und vollende mit den beiden andern Linien AD und DF nach §. 1. das Dreieck MDF, so ist der gegebene Winkel DAF an den Punkt M angetragen.

Beweis. Durch die angegebene Construction ist ein dem Dreieck ADF congruentes Dreieck MDF über der Linie MD entstanden und also die Linie DF in beiden einander gleich. Da nun in congruenten Dreiecken gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber stehen, so ist der Winkel DMF dem Winkel BAC gleich.

Anmerkung. In der angegebenen Construction ist die Richtung der durch den Punkt M gelegten Linie MD willkührlich angenommen worden. Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn auch die Richtung dieser Linie bestimmt, oder ein gegebener Winkel an einen bestimmten Punkt in einer Linie anzulegen ist.

§. 5.

Aufgabe. Eine oder mehrere Linien mit einer gegebenen durch einen oder mehrere bestimmte Punkte parallel zu ziehen.

Es werde zuerst der Fall betrachtet, wenn nur eine Linie

durch einen bestimmten Punkt mit einer gegebenen parallel gezogen werden soll.

Erste Auflösung Fig. 5. Man ziehe durch den gegebenen Punkt M in beliebiger Richtung eine Linie DF, daß sie die gegebene Linie AB durchschneide, so entstehen über der Linie AB zwei Winkel x, y, von diesen trage man einen, den Winkel y, an den Punkt M auf die entgegengesetzte Seite der durchschneidenden Linie, in der Richtung gegen F, daß der eine Schenkel des angetragenen Winkels y' in die Linie DF fällt, so gibt der andere Schenkel MK des Winkels y die Richtung der, mit der gegebenen Linie AB parallel zu ziehenden Linie an.

Zweite Auflösung Fig. 6. Man trage einen der beiden unter der gegebenen Linie liegenden Winkel z an den Punkt M auf der nämlichen Seite der durchschneidenden Linie DF in der Richtung von D nach F an, daß der eine Schenkel des angetragenen Winkels in die Linie DF falle, so läuft der andere Schenkel MK des angetragenen Winkels mit der gegebenen Linie AB parallel.

Dritte Auflösung Fig. 7. Man ziehe, wie vorhin, eine Linie DF durch den Punkt M, daß sie die gegebene Linie durchschneidet, schneide von dem Durchschnittspunkte N der beiden Linien aus auf der Linie AB irgend ein Stück NP ab, und beschreibe von dem Punkte M aus auf derselben Seite der Durchschnitts-Linie DF mit der Linie NP einen hinlänglich großen Kreisbogen, ferner beschreibe man mit der, zwischen dem gegebenen Punkte M und dem Durchschnittspunkte N liegenden Linie MN von dem Punkt P aus einen den vorigen durchschneidenden Kreisbogen, so gibt die gerade Linie zwischen diesem Durchschnittspunkte Q und dem gegebenen Punkte M die Richtung der mit AB parallel gehenden Linie QH an.

Beweis zur ersten Auflösung. Da der Winkel x oder y auf der entgegengesetzten Seite der durchschneidenden Linie in der Richtung von D nach F an den Punkt M angetragen ist, so werden durch diese Construction zwei gleiche Winkel erzeugt, welche zwischen zwei Linien auf der entgegengesetzten Seite einer durchschneidenden Linie liegen und also Wechselwinkel sind. Da sie einander gleich sind, so sind die beiden Linien AB und KN parallel.

Beweis zur zweiten Auflösung. Da der Winkel z auf der nämlichen Seite der durchschneidenden Linie an den Punkt M in der Richtung von D nach F angetragen wurde, so sind die Winkel z und z einander gleich. Sie sind die innern und äußern entgegengesetzten Winkel, und da zwei Linien mit einander laufen, wenn die innern und äußern an der nämlichen Seite der durchscheidenden Linie liegenden Winkel gleich sind, so thut die Auflösung der Aufgabe ein Genüge.

Beweis zur dritten Auflösung. Man ziehe von dem Durchschnittspunkt Q der beiden Kreisbogen die Linien QN und QP, so entstehen die zwei Dreiecke QPN und QMN, welche einander congruent sind, da QM = PN, QP = MN und QN = QN. In beiden Dreiecken stehen gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber, daher ist x = v. In jedem Dreiecke ist ferner die Summe der drei Winkel zweien Rechten gleich, also ist

$$x + y + z = 2\,R,$$

da aber v statt x gesetzt werden kann, so ist

$$v + y + z = 2\,R,$$

d. h. der Winkel z und die beiden Winkel v + y, die zwischen den Linien KH und AB an derselben Seite der durchschneidenden Linie liegen, sind zweien Rechten gleich. Da aus dieser Eigenschaft die Parallelität der durchschnittenen Linien folgt, so ist also die, durch die beiden Punkte Q und M gelegte, Linie mit der Linie AB parallel.

Bemerkung zu der dritten Auflösung. Man sieht, daß diese Art der Construction den beiden ersten der Kürze und Sicherheit wegen vorzuziehen ist. Die Lösung der Aufgabe wird um so genauer, je größer die Linie NP angenommen wird. Führt man die vorgeschriebene Methode auf beiden Seiten aus, was mit den nämlichen Linien, also ohne größere Weitläuftigkeiten, geschehen kann, so erhält man drei Punkte für die zu ziehende Linie, und dadurch noch größere Genauigkeit.

Anmerkung. Sollen durch mehrere Punkte Parallel-Linien mit einer gegebenen gezogen werden, so geschieht dieß, indem man durch jeden gegeben Punkt Durchschnitts-Linien auf AB zieht, und jeden einzelnen Fall nach den mitgetheilten Vorschriften behandelt.

§. 6.

Aufgabe. Auf eine gegebene Linie von einem Punkte ausserhalb derselben eine senkrechte Linie zu fällen. Fig. 8.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, der Punkt M.

Man beſchreibe mit dem Cirkel von dem gegebenen Punkte M aus einen Kreisbogen, welcher die gegebene Linie AB an zwei Punkten C und D durchſchneidet. Beſchreibe ferner mit einerlei Eröffnung des Cirkels von den beiden Durchſchnittspunkten der Linie AB auf der dem Punkte M entgegengeſetzten Seite zwei ſich durchſchneidende Kreisbogen, ſo wird die Linie, welche von dem gegebenen Punkte M aus in der Richtung des Durchſchnittspunkts P der beiden Kreisbogen auf die Linie AB gezogen wird, auf derſelben ſenkrecht aufſtehen.

Beweis. Die Linie MC iſt der Linie MD gleich, weil ſie mit der nämlichen Eröffnung des Cirkels erzeugt ſind. Aus dem nämlichen Grunde iſt CP = DP. Die Linie MP erzeugt die beiden Dreiecke MCP und MDP und gehört zu beiden. Da nun in beiden Dreiecken alle Seiten einander gleich ſind, ſo ſind auch die Dreiecke ſich ſelbſt und die den gleichen Seiten CP und DP gegenüber ſtehenden Winkel x und y einander gleich. Aus der Gleichheit der beiden Winkel x und y, der beiden Seiten MD und MC, und der zu den Dreiecken MCK und MKD gehörenden Linie MK, folgt die Congruenz der Dreiecke MCK und MKD, weil in beiden ein Winkel und die ihm anliegenden Seiten einander gleich ſind, und hieraus die Gleichheit der Winkel r und t, weil ſie den gleichen Seiten in zweien gleichen Dreiecken gegenüber ſtehen. r und t ſind Nebenwinkel über einer geraden Linie und gleich groß; daraus fließt ferner, daß jeder ein rechter Winkel iſt und daß folglich die von dem Punkte M auf die gegebene Linie AB gezogene Linie MK ſenkrecht aufſteht.

§. 7.

Aufgabe. Auf einem in einer Linie gegebenen Punkte eine ſenkrechte Linie zu errichten. Fig. 9.

Auflöſung. Der gegebene Punkt ſey M. Man ſchneide auf beiden Seiten deſſelben zwei gleiche Stücke MP und MQ ab, beſchreibe von den Endpunkten der abgeſchnittenen Stücke P und Q mit gleicher Eröffnung des Cirkels zwei ſich durchſchneidende Kreisbogen, ziehe von ihrem Durchſchnittspunkte K auf den, in der gegebenen Linie beſtimmten, Punkt M eine ge-

rade Linie, so steht diese Linie auf dem gegebenen Punkte senkrecht auf.

Beweis. Vermöge der Zeichnung ist die Linie MP = MQ und PK = KQ. Die Linie MK kommt in beiden Dreiecken vor. Aus der Gleichheit der drei Linien in zwei Dreiecken, folgt die Congruenz der Dreiecke und hieraus die Gleichheit der Winkel x und y, weil sie in gleichen Dreiecken gleichen Seiten entgegen stehen. Da nun die Nebenwinkel über einer geraden Linie nur unter der Bedingung, daß jeder ein rechter Winkel ist, einander gleich seyn können, so folgt hieraus ferner, daß die, sie trennende, Linie MK senkrecht auf dem Punkte M aufsteht.

Anmerkung. Die Auflösung wird um so genauer werden, je größer die auf beiden Seiten des Punktes M abgeschnittenen Stücke und je größer die Radien sind, mit welchen die sich durchschneidenden Kreisbogen gezogen werden.

§. 8.

Aufgabe. An dem Endpunkte einer Linie eine senkrechte Linie zu errichten. Fig. 10.

Auflösung. Die gegebene Linie heiße AM, ihr Endpunkt M. Man schneide von M aus von der Linie AM ein Stück MP ab, und beschreibe von dem Endpunkte M und dem Durchschnittspunkte P zwei sich durchschneidende Kreisbogen. Ziehe von dem Punkte P durch den Vereinigungspunkt der Kreisbogen K eine gerade Linie PQ, welche doppelt so groß ist, als die Entfernung des Punktes K von dem Punkte P, dann fälle man von dem Endpunkt Q dieser Linie auf den Punkt M eine Linie, so wird die Linie QM auf dem Endpunkte der gegebenen Linie Q senkrecht aufstehen.

Beweis. Die Linie PK = KM vermöge der Construction. Ebenso ist KQ = PK, weil PQ doppelt so groß als PK ist. Hieraus folgt ferner: daß KQ = KM, weil KQ der Linie KP gleich ist. Da nun diese drei Linien einander gleich sind, so sind auch die beiden Dreiecke KPM und KQM gleichschenklige Dreiecke, und die Winkel an der Grundlinie in beiden einander gleich, also

$$y = o \text{ und } s = t.$$

Da die Summe der Winkel eines Dreieckes, wie bekannt, zwei Rechte beträgt, so beträgt die in beiden gleichschenkligen Dreiecken vier Rechte, und es ist

$$r + x + y + o + t + s = 4\ R.$$

Die beiden Winkel über der geraden Linie, r und x, betragen zwei Rechte, werden diese abgezogen, so erhält man

$$s + t + y + o = 2\ R.$$

Da nun $y = o$ u. $s = t$ ist, so kann man in der so eben erhaltenen Gleichung t statt s und o statt y setzen, ohne daß der Werth der gewonnenen Gleichung verändert wird, und hieraus zieht man folgende

$$t + t + o + o = 2t + 2o = 2\ R.$$

oder

$$2(t + o) = 2\ R.$$

$$t + o = R.$$

d. h. der Winkel t + o ist ein rechter Winkel. Demnach steht die Linie QM auf dem Endpunkte der Linie AM senkrecht auf.

Anmerkung. Die Auflösung der Aufgabe wird um so genauer, je größer die PK und PM angenommen wird.

§. 9.

Aufgabe. Eine gegebene Linie in zwei gleiche Theile zu theilen. Fig. 11.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB. Man beschreibe von den Endpunkten der gegebenen Linie aus mit einerlei Radius über und unter der gegebenen Linie zwei sich durchschneidende Kreisbögen, und verbinde die beiden Durchschnittspunkte P und Q der Kreisbögen durch eine gerade Linie, so ist der Punkt M, wo jene die gegebene Linie AB durchschneidet, der sie in zwei gleiche Theile theilende Punkt.

Beweis. Es ist vermöge der Construction AP = PB und AQ = QB. Die Linie PQ erzeugt mittelst dieser vier Linien die zwei Dreiecke APQ und BPQ, welche einander gleich sind, da in ihnen die Linien einzeln genommen einander gleich sind. Da nun in gleichen Dreiecken gleichen Seiten gleiche Winkel entgegen stehen, so ist der Winkel x gleich v. Gesellt man nun zu der Gleichheit der beiden Winkel die Gleichheit der beiden anliegenden Seiten PB und PM, PA und PM in den beiden Dreiecken APM und MPB, so folgt hieraus die

Congruenz dieser zwei Dreiecke, und ferner die Gleichheit der beiden Abschnitte AM und BM der gegebenen Linie AB, da in congruenten Dreiecken gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber stehen.

§. 10.

Aufgabe. Eine gegebene Linie in zwei gleiche Theile von einem bestimmten Punkte ausserhalb derselben zu theilen. Fig. 12.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, der Punkt ausserhalb derselben M. Man ziehe von M auf den zunächst liegenden Endpunkt der Linie B eine Linie MB und mit dieser an den entgegengesetzten Endpunkt A der Linie AB eine ihr gleich große parallele Linie AQ auf die entgegengesetzte Seite, verbinde die beiden Endpunkte dieser Linien durch die Linie QM, so wird der Durchschnittspunkt C dieser Linie die gegebene Linie AB in zwei gleiche Theile theilen.

Beweis. Da AQ gleich und parallel mit der Linie MB ist, so folgt daraus die Gleichheit der beiden Winkel x und y, ebenso der Winkel r und s, als Wechselwinkel; und hieraus, da eine Linie und die zwei anliegenden Winkel die Gleichheit zweier Dreiecke bedingen, die Congruenz der Dreiecke AQC und BCM und endlich hieraus die Gleichheit der Linie CB und CA, weil beide in gleichen Dreiecken gleichen Winkeln gegenüberstehen, und demnach wird nach der obigen Methode die Linie AB in zwei gleiche Theile getheilt.

§. 11.

Aufgabe. Eine gegebene Linie in drei oder mehr gleiche Theile zu theilen. Fig. 13.

Erste Auflösung. Die gegebene Linie AB soll in drei gleiche Theile getheilt werden. Man nehme irgend eine Linie an, setze sie auf einer geraden Linie dreimal aneinander, wodurch die Linie CD entsteht, beschreibe mit derselben von ihren beiden Endpunkten C und D aus zwei sich durchschneidende Kreisbögen, von dem Durchschnittspunkte P dieser Kreisbögen lege man durch die Endpunkte C und D die Linie PC und PD

von hinlänglicher Größe, und ſchneide von P aus mit der gegebenen Linie AB auf PC und PD gleiche Stücke, PM und PN ab, verbinde die Endpunkte dieſer Linien M und N durch eine gerade Linie, und ziehe vom Durchſchnittspunkt P auf die Abſchnitte der, in drei gleiche Theile eingetheilten, Linie CD gerade Linien, ſo wird jeder Abſchnitt der Linie MN der dritte Theil der gegebenen Linie AB ſeyn.

Zweite Auflöſung. Fig. 14. Man ſetze auf irgend einer geraden Linie drei ſich gleiche Stücke aneinander, und bemerke die Durchſchnittspunkte P und Q, wodurch die Linie CD entſteht; ſetze die gegebene Linie AB unter irgend einem Winkel (am zweckmäßigſten einem ſpitzen) an einen Endpunkt der Linie CD, und verbinde die beiden Linien AB und CD zu einem Dreiecke durch die Linien MC, ziehe nun mit der Linie CM durch die Punkte P und Q parallele Linien, daß ſie die, der AB gleiche Linie MD durchſchneiden, ſo werden die Durchſchnittspunkte die gegebene Linie in drei gleiche Theile theilen.

Beweis zur erſten Auflöſung. Die Linie PD und CP iſt vermöge der Conſtruction der Linie CD gleich. Demnach iſt CDP ein gleichſeitiges Dreieck. Von den Seiten dieſes Dreiecks ſind die, der Linie AB gleichen, Stücke PM und PN abgeſchnitten. Es iſt alſo das Dreieck PMN dem Dreiecke PCD ähnlich, folglich auch ein gleichſeitiges Dreieck, und demnach iſt die Linie MN der gegebenen Linie AB gleich, und läuft mit der Linie CD parallel. Die Linien PG und PK theilen das Dreieck PMN und das Dreieck PCD in drei Dreiecke, die unter einander ähnlich ſind. Es iſt alſo in den beiden Dreiecken PMK′ und PCK

$$PC : PM = CK : MK',$$

ebenſo in den beiden Dreiecken PDG und PNG′

$$PD : PN = DG : NG'.$$

Da nun CK und GD der dritte Theil von CD iſt, ſo iſt auch MK′ oder KG′ der dritte Theil von MN, oder der ihr gleichen AB. Die beiden Linien MK′ und NG′ ſind zwei Drittheile von der Linie MN, alſo muß K′G′ ein Drittheil von ihr ſeyn, und demnach iſt die Linie MN in drei gleiche Theile eingetheilt.

Bemerkung zur erſten Auflöſung. Die Aufgabe

wird desto genauer gelöst werden, je größer die auf der geraden Linie zusammen zu setzenden gleichen Theile angenommen werden.

*Beweis zur zweiten Auflösung. Durch die Linien PP' und QQ', welche mit CM parallel gezogen wurden, sind unter sich ähnliche Dreiecke entstanden. In diesen gelten nun folgende Verhältnisse:

$$CD : DM = DQ : DQ',$$

und $$CD : DM = DP : DP'.$$

Da nun QD der dritte Theil von CD ist, so wird DQ' der dritte Theil von MD oder der ihr gleichen Linie AB seyn, ebenso ist DP' zweimal der dritte Theil von MD oder AB, und hieraus folgt, daß P'Q' ein Drittheil von MD ist, da

$$DP' - DQ' = P'Q' = (\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3})\ MD$$
$$= \tfrac{1}{3}\ MD$$

ist. Auf die nämliche Art zeigt es sich, daß MP' gleichfalls der dritte Theil von MD ist. Die Linie AB ist also auf die angegebene Art in drei gleiche Theile getheilt worden.

Die zweite Auflösung ist kürzer als die erste; die erste wird aber ein genaueres Resultat liefern.

Anmerkung. Soll eine Linie in mehrere, etwa n, gleiche Theile eingetheilt werden, so muß man auf einer geraden Linie n gleiche Theile auftragen, und im Uebrigen auf eine der beiden oben angegebenen Arten verfahren.

§. 12.

Aufgabe. Eine gegebene Linie in zwei oder mehrere Theile, nach gegebenen Verhältnissen zu theilen. Fig. 15 u. 16.

Auflösung. Die gegebene Linie FG soll in zwei Theile, welche in dem Verhältnisse 2 : 3 stehen, getheilt werden. Man setze auf einer geraden Linie fünf gleiche Stücke zusammen, wodurch die Linie CD entsteht, bemerke den Durchschnittspunkt P der Verhältnißtheile, verfahre nach der §. 11. gegebenen Methode, construire im ersten Fall Fig. 15. das gleichseitige Dreieck ACD, trage in dasselbe die Linie FG, und verbinde die Spitze des gleichseitigen Dreiecks ACD durch die gerade Linie AP mit dem Durchschnittspunkte P, so ist der Punkt S der Theilungs-

punkt, der die Linie FG nach dem gegebenen Verhältniſſe theilt.

Im zweiten Falle ziehe man (Fig. 16.) eine Parallele PQ mit der das Dreieck ergänzenden Seite MC von dem Durchſchnittspunkte P aus, ſo gibt der Punkt Q den Theilungspunkt der gegebenen Linie DM nach dem gegebenen Verhältniſſe an.

Der Beweis folgt aus dem im §. 11. Geſagten leicht.

Anmerkung. Iſt eine Linie nach dem Verhältniſſe m : n abzutheilen, ſo trage man auf einer geraden Linie m + n gleiche Theile an einander, bemerke den Durchſchnittspunkt P, welcher die Linie nach dem Verhältniſſe m : n theilt, und verfahre wie oben.

Hieraus folgt das allgemeine Verfahren ganz deutlich. Iſt eine Linie nach mehreren Verhältniſſen m : n : p : q . . . . . abzutheilen, ſo trage man ſo viele gleiche Theile auf einer geraden Linie aneinander, als die Summe aller Verhältniß-Zahlen m + n + p + q + ... angibt, bemerke die Durchſchnittspunkte der betreffenden Verhältnißzahlen, und verfahre ſofort auf die ſchon bekannte Weiſe.

§. 13.

Aufgabe. Die Größe einer Linie zu beſtimmen, welche der $\frac{m}{n}$te Theil einer gegebenen betragen ſoll. Fig. 17 u. 18.

Die gegebene Linie ſey AB und $\frac{m}{n}$ bedeute einen ächten Bruch.

Erſte Auflöſung. Man trage auf einer geraden Linie AC m + n gleiche Theile auf, bemerke den Durchſchnittspunkt C, welcher die in dem Verhältniß m : n ſtehenden Linien AC und CE erzeugt, und verfahre dann nach der §. 11. gegebenen Methode, ſo werden die beiden Dreiecke ABC und ADE entſtehen, worin ſich verhält:

$$AB : BD = AC : CE,$$

oder $$AB : BD = n : m,$$

woraus ſich ergibt $$BD = \frac{m}{n} AB.$$

Demnach iſt alſo BD die geſuchte Linie.

Zweite Auflöſung. Fig. 18. Man trage auf einer geraden Linie AD n gleiche Stücke aneinander, zähle von A

aus m gleiche Theile ab, welche in der Linie AC begriffen sind, bemerke den Durchschnittspunkt des mten Theils, trage von A aus an die Linie AD unter einem beliebigen Winkel die gegebene Linie AB an, verbinde die Endpunkte D und B durch die Linie DB mit einander, und ziehe durch den Punkt C eine Linie CK mit DB parallel, so ist das gegen die Spitze A des Dreiecks ABD gelegene Stück AK der $\frac{m}{n}$te Theil der gegebenen Linie.

Beweis. Fig. 18. Durch die Linie CK, welche mit der Linie BD parallel läuft, sind die beiden ähnlichen Dreiecke ABD und ACK entstanden, worin sich also verhält

$$AD : AC = AB : AK.$$

Vermöge der Construction ist

$$AD : AC = n : m,$$

also verhält sich $AB : AK = n : m,$

und es ist also $AK = \frac{m}{n} AB,$

d. h. AK ist der $\frac{m}{n}$te Theil von AB.

Bemerkung. Die zweite Auflösung verdient den Vorzug vor der ersten, weil die Geschäfte, die sie vorschreibt, kürzer als die der ersten sind.

Anmerkung. Ist unter den nämlichen Bedingungen, wie oben, $\frac{m}{n}$ ein unächter Bruch, also m größer als n ist, so daß also

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{p}{n}$$

und die zu findende Linie die gegebene um ein bestimmtes Stück $\left(\frac{p}{n}\right)$ übertrifft, so trage man m gleiche Theile auf eine Linie, bemerke den Durchschnittspunkt C, welcher n Theile abschneidet, und verfahre mit Parallel-Linien wie oben.

§. 14.

Aufgabe. Es sind zwei Linien gegeben, man soll zwei andere Linien finden, welche mit den gegebenen die innern oder äussern Glieder einer geometrischen Proportion bilden.

Erste Auflösung. Fig. 19. Die gegebenen Linien seyen AB und AC. Man verbinde die beiden Linien unter ir-

gend einem Winkel in dem Punkte A mit einander, ziehe von dem Endpunkte der kleinern auf irgend einen Punkt innerhalb der größern eine Linie CD und mit dieſer von dem Endpunkte der größern eine Parallele BE, verlängere die kleinere Linie AC, daß ſie dieſe Parallele BE in einem Punkt E treffe, ſo ſind die Linien AD und AE die geſuchten.

Zweite Auflöſung. Fig. 20. Man verbinde die gegebenen Linien unter irgend einem Winkel BAC, beſchreibe von dem Endpunkte einer jeden mit der andern Linie zwei ſich durchſchneidende Kreisbogen, lege durch ihren Durchſchnittspunkt M in irgend einer Richtung hinlänglich ausgedehnt eine Linie PQ, und verlängere die beiden Linien AB und AC, bis ſie die Linien PQ durchſchneiden, ſo ſind die Ueberſchuß-Linien CD und BF die geſuchten.

Beweis zur erſten Auflöſung. Die Linie AB und AC ſind unter irgend einem Winkel zuſammengeſetzt, die Linie BE läuft parallel mit der willkührlich gezogenen DC; dadurch entſtehen zwei Dreiecke ADC und ABE, welche durch eine parallele Linie von einander getrennt ſind. Es gilt demnach folgende Proportion:

$$AC : AD = AE : AB,$$

oder wenn die innern und die äuſſern Glieder verſetzt werden:

$$AD : AC = BA : AE,$$

und demnach ſind die beiden Linien AD und AE ſo beſchaffen, daß ſie mit den gegebenen die innern oder äuſſern Glieder einer geometriſchen Proportion bilden.

Beweis zur zweiten Auflöſung. Die Linie CM iſt gleich der Linie AB, und die Linie MB gleich der Linie AC; hieraus folgt: daß die Linie MB mit CA und CM mit AB parallel läuft; ferner, daß die Winkel x, x', x'', ebenſo y und y' einander gleich ſind. Aus der Gleichheit je zweier Winkel in zwei Dreiecken folgt die Aehnlichkeit der letztern, demnach ſtehen alſo die Seiten der Dreiecke DCM und MBF in gleichen Verhältnißen, und hieraus entnimmt man folgende Proportion: $CD : CM = MB : BF$,

oder da AB ſtatt CM und CA ſtatt BM geſetzt werden darf:

$$CD : AB = CA : BF,$$

und

und hieraus durch Versetzung der innern und äussern Glieder dieser Proportion: AB : CD = BF : AC.

Demnach bilden die, auf obige Art gefundenen, Linien CD und BF die mittlern oder äussern Glieder einer geometrischen Proportion.

Anmerkung. An beide Auflösungen schließt sich leicht die Bemerkung an, daß unzählig viele Fälle der Aufgabe genügen. Denn im ersten Falle hängt die Auflösung von der Annahme des Punktes D in der Linie AB ab. Da nun diese keinen weitern Bestimmungen unterliegt, sondern willkührlich ist, so muß auch jede Annahme zwei verschiedene Linien als äussere oder innere Glieder der Proportion erzeugen.

Das Nämliche ist bei der zweiten Auflösung der Fall. Die Größe der Linien CD und BF hängt von der Richtung ab, in welcher die Linie PQ durch den Punkt M gelegt wird. Da nun durch diesen Punkt unzählig viele Richtungen möglich sind, so muß es auch unzählig viele Fälle geben, welche dieser Aufgabe genügen. Diese Aufgabe gehört demnach zu den Unbestimmten.

§. 15.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Linien die vierte Proportional-Linie zu finden.

Erste Auflösung. Fig. 21. Die drei gegebenen Linien seyen a, b, c, und das Verhältniß, worin sie zu einander stehen, sey angedeutet durch a : b = c : x. Man verbinde zwei Linien von unbestimmter Größe unter irgend einem Winkel mit einander, trage von dem Durchschnittspunkte der beiden Linien M aus auf beiden Schenkeln des Winkels die Linien des ersten Verhältnisses a = ME, b = MF auf, verbinde die beiden Endpunkte dieser Linien E und F durch eine gerade Linie EF mit einander, trage auf denjenigen Schenkel, worauf die erste Linie getragen ist, die dritte Linie c = EK an und ziehe durch ihren Endpunkt K eine Linie parallel mit der Linie EF, welche die gegenüber liegende Linie durchschneidet, so wird die hiedurch abgeschnittene Linie FG die vierte Proportional-Linie seyn.

Beweis. Die Linie MF = b, ME = a, EK = c vermöge der Construction; ferner läuft die Linie GK parallel

mit der Linie FE. Hierdurch entstehen die beiden Dreiecke MGK und MFE, welche, durch Parallel-Linien erzeugt, einander ähnlich sind, und hierin gilt, wie bekannt, folgende Proportion: ME : MF = EK : FG.

Da nun die drei ersten Linien der Proportion den gegebenen drei Linien gleich sind, so geht diese Proportion in folgende über:

a : b = c : FG,

und demnach ist also FG die gesuchte vierte Proportional-Linie zu den drei gegebenen Linien a, b, c.

Zweite Auflösung. Fig. 20. Man verfahre nach §. 14. zweite Auflösung; trage auf den Schenkel eines beliebigen Winkels DAF die zweite und die dritte Linie, (mache AB = b, AC = c) und trage an die Linie des zweiten Gliedes die Linie des ersten Gliedes a = CD an, ziehe von C und B aus mit den Linien b und c zwei sich in dem Punkte M durchschneidende Kreisbögen, lege durch D und M die gerade Linie DF und verlängere die Linie AB bis sie die Linie DF durchschneidet, so ist die Linie BF die gesuchte vierte Proportional-Linie.

Der Beweis führt sich leicht aus folgender Proportion:

CD : AB = CA : BF.

Werden nun statt den Linien CD, AB, CA ihre ursprüngliche Werthe gesetzt, so entsteht:

a : b = c : BF,

und demnach ist die Linie BF die gesuchte vierte Proportional-Linie.

§. 16.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien die dritte geometrische Proportional-Linie zu finden.

Auflösung. Fig. 22. Die gegebenen Linien seyen a, b, die gesuchte x und das Verhältniß, worin die drei Linien zu einander stehen, sey angedeutet durch die Proportion

a : b = b : x.

Man verbinde zwei Linien von unbestimmter Länge unter irgend einem Winkel mit einander, und trage von dem Vereinigungspunkt der beiden Linien M die Linien a = MC

und b = MF auf die zwei Schenkel des Winkels, verbinde die Endpunkte dieser Linie C und F durch eine dritte CF, und setze die Linie b = CK an die erste Linie MC an, und ziehe mit der Linie CF durch den Endpunkt K der Linie CK eine Parallele, und verlängere MF bis zum Durchschnitte G, so wird die dadurch angegebene Linie FG die gesuchte dritte Proportional-Linie seyn.

Beweis. Vermöge der Construction sind zwei ähnliche Dreiecke MFC und MGK entstanden. Es gilt daher folgende Proportion: MC : MF = CK : FG.
Da nun die MF so groß als CK und MC = a, MF = b ist, so gehet obige Proportion in folgende über:

a : b = b : FG.

Es ist also FG = x, und zu a und b ist die dritte Proportional-Linie gefunden.

§. 17.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere geometrische Proportional-Linie zu finden.

Erste Auflösung. Fig. 23. Die gegebenen Linien seyen CM = a und MD = b. Es soll eine Linie x gesucht werden, daß ist a : x = x : b.
Man reihe die zwei gegebenen Linien in gerader Linie CMD aneinander und bemerke ihren Berührungspunkt M, beschreibe über ihrer Summe einen Halbkreis und errichte nach §. 7. auf dem Berührungspunkt der beiden Linien M eine senkrechte Linie, welche die Krümmungslinie des Halbkreises in F durchschneidet, so ist die Linie MF zwischen der Peripherie und dem Berührungspunkte M die gesuchte Linie.

Beweis. Man ziehe die Hülfslinien CF und FD, so entstehen, da die Linie FM senkrecht auf CD aufsteht, zwei rechtwinklige Dreiecke CMF und FMD, worin der Winkel r = r'. Der Winkel x + y ist ein rechter, weil die beiden Schenkel, welche ihn bilden, auf den Endpunkten des Diameters in dem Halbkreises CFD aufstehen. Der Winkel y + q ist ein Rechter, weil es die zwei an der Hypothenuse anliegenden

Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks sind. Demnach ist also

$$x + y = y + q,$$

und hieraus, wenn auf beiden Seiten der Winkel y abgezogen wird, folgt: daß der Winkel x in dem Dreiecke CMF gleich ist dem Winkel q im Dreieck FMD. Da nun zwei Winkel eines Dreiecks die Größe des dritten Winkels bestimmen, so ist auch der Winkel $p = y$, und hieraus folgt die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke CFM und DFM, und es gilt also zwischen den, gleichen Winkeln gegenüberstehenden, Seiten folgende Proportion: CM : FM = FM : MD.
Da nun CM der Linie a und MD der Linie b gleich ist, so geht die vorliegende Proportion in folgende über:

$$a : FM = FM : b,$$

und die Linie FM ist also die verlangte Linie.

Zweite Auflösung. Fig. 24. Man beschreibe über der größern Linie CD einen Halbkreis, und schneide von ihr die kleinere ab = CE ab, errichte in dem Durchschnittspunkte E eine senkrechte Linie, welche die Krümmungslinie des Halbkreises durchschneidet, und verbinde den Durchschnittspunkt der Peripherie M und den Endpunkt C der kleinern Linie CE durch eine gerade Linie CM, so ist diese die gesuchte Linie.

Beweis zur zweiten Auflösung. Man ziehe die Hülfslinie MD, dadurch entstehen folgende zwei hier nöthige Dreiecke CME und CMD. Da die Linie EM senkrecht auf CD aufsteht, so ist das Dreieck CME ein rechtwinkliges. Das Dreieck CMD ist gleichfalls rechtwinklig, weil die Spitze des Winkels CMD in der Peripherie liegt, und die beiden Schenkel CM und MD auf den Endpunkten des Durchmessers aufstehen. Der Winkel x gehört zu dem Dreieck CEM und zu dem Dreieck CMD. Da nun die Summe zweier Winkel eines Dreiecks die Größe des dritten bestimmt, so muß auch der Winkel y im Dreieck CME und der Winkel p im Dreieck CMD einander gleich seyn, wodurch die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke bedingt ist. Demzufolge gilt also folgende Proportion zwischen der Hypotenuse und einer Cathete der beiden rechtwinkligen Dreiecke

$$CD : CM = CM : CE.$$

Da nun CD = a, und CE = c ist, so geht die vorliegende Proportion in folgende über:

$$b^2 : CM = CM : a,$$

woraus hervorgeht, daß CM der Aufgabe ein Genüge thut.

Zusatz 1. Fig. 24. Da die Linie CD der Durchmesser eines Kreises und MF eine zu demselben senkrechte und bis zur Peripherie verlängerte Linie ist, so folgt aus dem Beweis zur ersten Auflösung folgende Bemerkung: Die auf dem Durchmesser eines Kreises senkrecht aufgestellte und bis an die Peripherie verlängerte Linie ist die mittlere Proportional-Linie zwischen den beiden Abschnitten des Diameters; oder, da CFD ein rechtwinkliges Dreieck und FM die von der Spitze desselben auf die Hypotenuse gefällte senkrechte Linie ist, so folgt: die von der Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse gefällte senkrechte Linie ist die mittlere Proportional-Linie zwischen den beiden durch sie erzeugten Abschnitten der Hypotenuse.

Zusatz 2. Fig. 23. Da CMD ein rechtwinkliges Dreieck ist, so fließt daraus folgende Bemerkung: Die eine Cathete ist die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen der Hypotenuse und dem an dieser Cathete anliegenden Abschnitte der Hypotenuse, welcher durch den von der Spitze des rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse gefällten Perpendikel erzeugt wird.

§. 18.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere arithmetische Proportional-Linie zu finden.

Auflösung. Fig. 25. Die gegebenen Linien seyen AB und CD. Man nehme irgend eine Linie AC willkührlich an und errichte auf ihren Endpunkten A und C die gegebenen Linien AB und CD senkrecht, und verbinde ihre Endpunkte durch die Linie BD, halbire die angenommene Linie AC in E und errichte in E die Linie EM senkrecht, daß sie die Verbindungslinie BD in M schneide, so ist die Linie EM die gesuchte.

Beweis. Man verlängere die kleinere Linie AB nach K zu, und lege durch den Punkt M die Linie KG mit der angenommenen Linie AC parallel, wodurch die Linien KM und MG entstehen. Da die drei Linien AK, EM und CD senkrecht auf AC aufstehen, so laufen sie miteinander parallel. Die Linie KG läuft mit AC parallel. Die Linie AE ist der Linie EC gleich, folglich sind die Linien KM und MG auch

als zwischen gleichen Parallelen liegend, einander gleich. Die Winkel KMB und DMG sind als Scheitelwinkel einander gleich; ebenso die Winkel BKM und MGD als innere Wechselwinkel zwischen den Parallelen AK und CD. Hieraus folgt die Congruenz der Dreiecke KMB und MDG, und also auch der Seiten KB und DG.

Da nun die Linie ME der GC und der KA gleich ist, so ist die Summe von GC und KA doppelt so groß, als die Linie ME, und es ist:

$$2 \cdot ME = KA + GC,$$

wird nun von der Linie KA das Stück KB weggenommen und zu GC das jenem gleiche Stück DG gesetzt, so verändert sich die Richtigkeit der mitgetheilten Gleichung nicht, und es ist also:

$$2 \cdot ME = AB + DC,$$

und ME ist also die arithmetische Proportional-Linie zwischen den beiden gegebenen Linien.

Anmerkung. In dem vorliegenden Falle wurde die Auflösung unter der Bedingung vorgetragen, daß die gegebenen Parallelen senkrecht auf AC aufgestellt wurden. Man sieht leicht ein, daß der nämliche Zweck erreicht worden wäre, wenn die beiden Linien unter irgend einem andern Winkel aufgesetzt worden wären. Im letzten Fall muß dann die Linie EM von der Mitte der Linie AC aus parallel mit den gegebenen Linien gezogen werden. Man kann die mittlere arithmetische Proportional-Linie auf eine leichtere und schnellere Art dadurch finden, daß man die beiden gegebenen Linien AB und CD in gerader Richtung zusammen setzt und ihre Summe halbirt, wodurch das nämliche Resultat entstanden wäre. In jenem Falle wäre uns aber durch die Bemerkung entgangen, daß die Summe zweier begränzter ungleicher Parallel-Linien doppelt so groß ist als die Linie, welche die Mittelpunkte der beiden Seiten-Linien verbindet.

§. 19.

Aufgabe. Zur Summe und Differenz zweier Linien die mittlere geometrische Proportional-Linie zu finden. Fig. 26.

Auflösung. Die größere Linie sey CD = a, die kleinere CM = b. Man beschreibe über der größeren Linie CD einen Halbkreis, trage an dem einen Endpunkte die kleinere Linie CM so an, daß sie die Peripherie in dem Punkte M

durchschneide, und verbinde den Durchschnittspunkt M mit dem andern Endpunkte D der gegebenen Linie a, so ist die Linie MD die gesuchte Linie.

Beweis. Man verlängere die Linie CM in gerader Richtung von dem Punkte C aus um die Linie CD = CF, beschreibe von C aus mit a = CD einen Halbkreis, und verlängere auch CM von M aus, daß sie die Peripherie des Halbkreises trifft. Dieser Darstellung zufolge ist:

$$FM = CD + CM,$$

d. h. der Summe der beiden gegebenen Linien gleich.

$$MG = CD - CM,$$

d. h. der Differenz derselben gleich.

Die Linie MD steht senkrecht auf dem Durchmesser, und ist also nach §. 17. Zusatz 1. die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen FM und MG. Es gilt also folgende Proportion:

$$FM : MD = MD : MG,$$

oder da FM die Summe und MG die Differenz beider ausdrückt: $a + b : MD = MD : a - b$,

und es ist also MD die mittlere Proportional-Linie zwischen der Summe und der Differenz der gegebenen Linien a und b.

Anmerkung. Man hätte diese Aufgabe auch auf die §. 17. angegebene Methode lösen können. Diese Auflösungsart aber ist hier mitgetheilt, weil man durch sie auf folgenden interessanten Satz geführt wird: daß die eine Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen der Summe und Differenz der Hypotenuse und der andern Cathete ist.

§. 20.

Aufgabe. Es ist eine Linie gegeben und zwei Punkte ausserhalb derselben. Einen Punkt in der Linie anzugeben, welcher von den gegebenen Punkten gleich weit absteht. Fig. 27.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, die Punkte ausserhalb derselben P, Q. Man verbinde die beiden Punkte P und Q durch eine gerade Linie PQ mit einander, und errichte in der Mitte derselben (§. 9.) eine senkrechte Linie MN

(§. 7.), welche die gegebene Linie AB in dem Punkte N durchschneidet, so ist der Punkt N der gesuchte Punkt.

Beweis. Da der Punkt M in der Mitte der Linie PQ liegt und MN senkrecht auf PQ aufsteht, so ist PM = MQ und der Winkel y dem Winkel x gleich. Die Linie MN bildet die Trennungslinie für die Dreiecke PMN und QMN. Da nun beide Dreiecke zwei Linien und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben, so sind auch die beiden Dreiecke congruent, und hieraus ergibt sich, daß die Linie PN der Linie NQ gleich ist, und also der Punkt N von den beiden Punkten P und Q gleich weit absteht.

§. 21.

Aufgabe. Es ist eine Linie gegeben und zwei Punkte ausserhalb derselben. Man soll von den beiden Punkten zwei Linien, mit einander parallel auf die gegebene Linie ziehen, so daß die Summe beider dem Abstande beider Punkte von einander gleich sey. Fig. 28.

Auflösung. Die Linie sey AB, die beiden Punkte ausserhalb derselben P und Q. Man verbinde die gegebenen Punkte P und Q durch eine gerade Linie mit einander, halbire diese gerade Linie PQ, und lege die Hälfte von M aus so in die gegebene Linie, daß ihr Endpunkt K in die gegebene Linie AB falle, ziehe die gerade Linie MK, und parallel mit dieser Linie von den beiden gegebenen Punkten P und Q die Linien PF und PQ, welche die gegebenen Linien treffen; so sind diese beide Linien so groß, als die Entfernung der beiden Punkte P und Q von einander.

Beweis. Die Linie KM ist der Hälfte von PQ gleich, mit ihr laufen die beiden Linien FP und GQ vermöge der Construction parallel, demnach ist nach der Bemerkung des §. 18. die Linie MK eine Linie, welche die Seitenlinien zweier begränzten Parallelen halbirt, und also der Hälfte jener gleich ist. Die Linie MK aber ist auch der Hälfte der Entfernung zwischen den gegebenen zwei Punkten gleich, folglich ist die Entfernung zwischen den beiden Punkten PQ und die Summe der Linien GQ

und FP einander gleich, und die Auflösung thut der Aufgabe Genüge.

Bemerkung über die Möglichkeit der Aufgabe. Die Aufgabe ist, wie man sich leicht überzeugen kann, nur so lange möglich, als die Hälfte der Entfernung der beiden Punkte von einander eben so groß, oder größer ist, als der senkrechte Abstand der Linie AB von dem Mittelpunkte M der Entfernung zwischen den gegebenen Punkten. Ist dieser größer, so wird die Aufgabe unmöglich.

§. 22.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ausserhalb derselben sind zwei Punkte gegeben. Man soll von den beiden Punkten zwei mit einander parallel laufende Linien auf die gegebene so ziehen, daß ihre Summe dreimal so groß, als die Entfernung beider Punkte von einander ist. Fig. 29.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, die beiden Punkte P und Q. Man halbire die Entfernung zwischen den beiden Punkten, bemerke den Punkt M, und nehme eine Linie, welche der Entfernung zwischen beiden Punkten und ihrer Hälfte gleich ist, und trage diese Linie CD von dem Mittelpunkte M aus so an, daß ihr Endpunkt D in die Linie AB falle, und ziehe die Linie MD und mit dieser durch die gegebenen Punkte P und Q Parallel-Linien, welche die gegebene Linie AB durchschneiden, so sind die Linien PG und QK die Gesuchten.

Beweis. Die Linie MD ist gleich der Hälfte der dreifachen Entfernung zwischen den beiden Punkten, und läuft von der Mitte M der Linie PQ aus mit den beiden Linien PQ und QK parallel, ist also auch nach §. 18. der Hälfte beider Parallelen GP und KQ gleich. Hieraus folgt, daß die Summe dieser beiden Parallelen der dreifachen Entfernung zwischen den beiden Punkten P und Q gleich ist, und also den Anforderungen der Aufgabe ein Genüge leistet.

Anmerkung. Diese Aufgabe läßt sich sehr leicht ganz allgemein stellen. Es ist eine Linie und ausserhalb derselben sind zwei Punkte gegeben. Man soll von den beiden Punkten zwei mit einander parallel laufende Li-

nien auf die gegebene so ziehen, daß ihre Summe der nfachen Entfernung gleich ist. Die Auflösung ergibt sich leicht, wenn man die halbe Entfernung zwischen beiden Punkten nmal, oder die Entfernung $\frac{n}{2}$ mal nimmt, und diese Linie von dem Mittelpunkte der Entfernung zwischen beiden Punkten auf die gegebene Linie auflegt, und dann von den beiden Punkten Parallelen mit ihr zieht. Ebenso kann diese Aufgabe leicht gelöst werden, wenn von den beiden Punkten Parallelen gezogen werden sollen, deren Summe $\frac{1}{n}$ oder $\frac{m}{n}$ von der zwischen den gegebenen Punkten liegenden Entfernung betragen soll.

Die Möglichkeit der Aufgabe wird dadurch bedingt, daß der senkrechte Abstand des Mittelpunktes der beiden gegebenen Punkte von den gegebenen Linien eben so groß oder kleiner ist, als die Hälfte der fraglichen Summe. Sie wird unmöglich, wenn derselbe größer ist als die Hälfte der fraglichen Summe.

§. 23.

Aufgabe. Es ist eine begränzte Linie und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine Linie so legen, daß zwei von den Endpunkten der gegebenen Linie auf jene parallel gezogene Linie der gegebenen Linie gleich seyen, und die eine noch einmal so groß, als die andere sey. Fig. 30.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, der Punkt D. Man setze die gegebene Linie AB an sich selbst, wodurch die Linie FB entsteht; verbinde den gegebenen Punkt D mit dem Endpunkt F, so gibt die Linie FD die Lage der gesuchten Linie an. Man theile nun die gegebene Linie AB in drei Theile, und trage von dem einen Endpunkte A aus ein Drittheil und von dem andern zwei Dritttheile von AB so gegen die gefundene Linie FD, daß ihre beiden Endpunkte in dieselbe fallen, so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis. Die Linie AB wurde an sich selbst gesetzt, wodurch die Linie FB entstand, welche also doppelt so groß, als die gegebene Linie ist. Durch den Punkt D wurde von F aus die Linie FDM′ gezogen; die gegebene Linie AB wurde in zwei Theile AM und MB getheilt, wovon die eine $\frac{1}{2}$ AB

und die andere $\frac{2}{3}$ AB beträgt, und sich daher zu einander wie 1 : 2 verhalten, und diese Linien wurden an den Endpunkten der gegebenen Linie AB so aufgetragen, daß sie in die durch D gezogene Linie auffielen, und mit ihr die Dreiecke FAM′ und FBM′ bilden. Unter diesen Linien gelten nun folgende Proportionen:

$$FA : FB = 1 : 2$$

$$AM' : BM' = 1 : 2,$$

und hieraus $FA : FB = AM' : BM'$

Es sind also die beiden Dreiecke FAM′ und FBM′ einander ähnlich, die Linien AM′ und BM′ also auch einander parallel, und betragen zusammen die Summe der gegebenen Linie AB, auch ist die eine noch einmal so groß als die andere. Sie entsprechen also den Forderungen der Aufgabe vollkommen.

Die Aufgabe ist so lange möglich, als der senkrechte Abstand der Linie FM′ von dem Endpunkte A der gegebenen Linie AB gleich oder kleiner ist, als der ihm zugehörige Theil der Linie AB. Sie wird unmöglich, wenn derselbe größer ist, was sich leicht erkennen läßt.

Auch ist leicht einzusehen, daß es zwei Lagen der Linien AM′ und BM′ gibt, welche der Aufgabe genügen, wenn AM′ größer ist, als der senkrechte Abstand von A auf FM′.

§. 24.

Aufgabe. Es ist eine begränzte Linie und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine Linie so legen, daß zwei von den Endpunkten der gegebenen Linie parallel laufende Linien doppelt so groß, als die gegebene Linie seyen, sie selbst aber zu einander in einem gegebenen Verhältnisse stehen. Fig. 31.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, der gegebene Punkt D, das Verhältniß, worin die beiden Linien zu einander stehen sollen, sey 2 : 3. Man setze die gegebene Linie dreimal aneinander, wodurch die Linie FB entsteht, nehme die Linie AB doppelt, theile sie nach §. 11. in fünf gleiche Theile, und bemerke den Punkt, welcher zwei und drei

gleiche Theile von einander trennt, wodurch die Linien EM und FM entstehen. Nun ziehe man von dem Endpunkte F der Linie FB durch den gegebenen Punkt eine unbestimmte Linie, und trage von den Endpunkten der Linie AB die beiden Linien EM und FM so auf, daß ihre Endpunkte in die durch den Punkt D gehende Linie auffallen, wodurch die Linien AM′ und BM′ entstehen, so sind dieß diese gesuchten Linien.

Beweis. Die Linie AB wurde dreimal an sich angetheilt, wodurch die Linie BF und FA entstand, die sich wie 2 : 3 zu einander verhalten. Die Linie EF ist zweimal so groß als AB, und in zwei Theile EM und MF getheilt, welche sich zu einander wie 2 : 3 verhalten. Aus den Linien AM′ = EM und BM′ = MF wurden mit den Linien FA und FM′, FB und BM′ zwei Dreiecke construirt, worin nun folgende Proportionen gelten:

$$FA : FB = 2 : 3$$
$$M'A : BM' = 2 : 3$$

und hieraus $FA : FB = AM' : BM'$.

Die hier gemachten Linien AM′ und BM′ durchschneiden die Schenkel eines Winkels so, daß seine Abschnitte mit ihnen in gleichem Verhältnisse stehen, also laufen sie mit einander parallel, stehen zu einander in dem Verhältnisse wie 2 . 3, betragen ihrer Summe nach doppelt so viel als die gegebene Linie AB, und entsprechen also den in der Aufgabe gestellten Bedingungen.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als der senkrechte Abstand von einem Endpunkte auf die durch den gegebenen Punkt zu ziehende Linie eben so groß, oder kleiner, als der diesem Endpunkte anzusetzende Theil der gegebenen doppelten Linie AB ist. Ist er größer, so ist die Aufgabe unmöglich, denn alsdann kann diese Linie nicht mehr von ihm erreicht werden.

Anmerkung über die Anzahl der Constructionen. In dem Falle, wo die an den Endpunkten der gegebenen Linie AB anzusetzenden Verhältniß-Theile den senkrechten Abständen gleich sind, ist nur ein Fall möglich; sind sie aber größer, so sind an der durch den Punkt D gehenden Linie FM zwei Durchschnittspunkte möglich, welche den Anforderungen der Aufgabe Genüge leisten.

Zusatz. Diese Aufgabe läßt sich leicht in das Allgemeine ausdehnen, wenn unter den nämlichen Bedingungen, wie oben, die Linien, welche von den Endpunkten der gegebenen Linie

auf die durch den Punkt zu ziehende parallel gefällt werden sollen, zu einander in dem Verhältnisse wie $m : n$ stehen, und das $r$fache oder dem $r$ten Theil der Linie AB gleich seyn sollen. Die Auflösung der Aufgabe wird leicht auf eine der obigen ähnliche Art gewonnen. Die Bedingungen für die Möglichkeit der Aufgabe verändern sich nach den gegebenen Prämissen.

§. 25.

Aufgabe. Es ist eine gerade unbegränzte Linie und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben. Man soll von dem gegebenen Punkte aus eine Linie auf die gegebene so ziehen, daß sie einen bestimmten Winkel mit jener bilde. Fig. 32.

Auflösung. Die gerade unbegränzte Linie sey AB, der gegebene Punkt D und der gegebene Winkel BED. Man trage nach §. 4. an einen willkührlich gewählten Punkt K in der gegebenen Linie den gegebenen Winkel BED so an, daß der eine Schenkel in die gegebene Linie AB falle, und verlängere den andern Schenkel KG unbestimmt, so wird er entweder den gegebenen Punkt treffen, oder nicht. Im ersten Falle ist die Aufgabe gelöst, im zweiten ziehe man durch den gegebenen Punkt D mit dem Schenkel KG eine Parallele, welche die gegebene Linie AB in einem Punkt E trifft, so ist der hierdurch gebildete Winkel DEB der gesuchte; denn der construirte Winkel ist wegen der gezogenen Parallel-Linie dem gegebenen gleich, und einer seiner Schenkel gehet durch den gegebenen Punkt D.

Der **Beweis** erhellt leicht aus der Construction.

Anmerkung. Der Lage nach sind zwei Constructionen möglich, die eine auf der einen, die andere auf der entgegengesetzten Seite des Punktes. Bei einem rechten Winkel ist nur eine möglich.

§. 26.

Aufgabe. Es ist eine gerade Linie und eine auf ihr senkrecht stehende begränzte Linie gegeben. Man soll einen gegebenen Winkel so auf erstere tragen,

daß der eine Schenkel in dieſe falle, der andere den Endpunkt der ſenkrechten treffe.

Erſte Auflöſung. Fig. 33. Die gegebene unbegränzte Linie ſey AB, die ſenkrechte CD und der gegebene Winkel ſey DEB. Man trage an einen willkührlichen Punkt K auf einer der Seiten der gegebenen ſenkrechten Linie den gegebenen Winkel an, daß der eine Schenkel auf die gegebene Linie AB falle und der andere KE in ſolcher Richtung, daß er die ſenkrechte Linie ſelbſt oder ihre Verlängerung treffe. Nun ziehe man durch den Endpunkt D der ſenkrechten Linie GK eine Parallele, welche die gegebene Linie AB in einem Punkte E durchſchneidet, ſo iſt der Winkel AED der geſuchte.

Zweite Auflöſung. Fig. 34. Man errichte an der Spitze E des gegebenen Winkels BEM mit einem der beiden Schenkel eine ſenkrechte Linie, wodurch der Winkel FEM entſteht, trage dieſen Winkel FEM ſo an die Spitze D der ſenkrechten Linie DC, daß ein Schenkel in dieſe Linie falle und der andere die gegebene Linie AB durchſchneide, ſo iſt der hierdurch entſtandene Winkel DEA der geſuchte.

Der Beweis zur erſten Auflöſung findet ſich vermittelſt der Parallel-Linien KG und DE, welche gleiche Winkel mit der Linie AB bilden, und von denen die letztere durch den gegebenen Endpunkt der ſenkrechten Linie CD geht, leicht.

Beweis zur zweiten Auflöſung. Da die Linie CD ſenkrecht auf AB aufſteht, ſo iſt der Winkel r ein rechter und die beiden andern Winkel x und y in dem Dreieck CDE ſind als die Ergänzungswinkel der drei Winkel eines Dreiecks zu zwei rechten, gleichfalls einem rechten Winkel gleich. Die beiden Winkel FEM und MEB ſind ebenfalls einem Rechten gleich. Der an dem Endpunkte D der ſenkrechten Linie angetragene Winkel x iſt vermöge der Conſtruction dem Winkel FEM gleich, alſo muß auch der ihn zu einem rechten Winkel ergänzende Winkel y dem Winkel MEB gleich ſeyn. Demnach iſt der Winkel AED dem gegebenen gleich und ſein Schenkel geht durch den Endpunkt D der ſenkrechten Linie.

§. 27.

Aufgabe. Es ist eine gerade Linie und ein Punkt ausserhalb derselben gegeben. Man soll zwei gegebene Winkel so auf die Linie tragen, daß sich ihre Schenkel in dem gegebenen Punkte vereinigen.

Auflösung. Fig. 35. Die gegebene Linie sey AB, der Punkt D, die Winkel M'F'A' und B'E'K'. Man trage jeden der gegebenen Winkel an zwei willkührliche Punkte E und F der gegebenen Linie so an, daß der eine Schenkel auf die Linie selbst, der andere auf diejenige Seite, auf welcher der gegebene Punkt liegt, falle, wodurch die Winkel BEK und AFM entstehen, ziehe von dem Punkte D aus mit den Schenkeln EK und FM Parallel-Linien, so werden die hierdurch entstandenen Winkeln DHA und DGB die gesuchten Winkel seyn.

Der **Beweis** führt sich nach §. 26. leicht.

Anmerkung. Die beiden Winkel werden innerhalb der Linien GD und HD liegen, wenn die beiden gegebenen Winkel spitz, oder ein spitzer und stumpfer sind, welche zusammen weniger als zwei rechte betragen; sie werden ausserhalb der Linie liegen, wenn jeder von ihnen ein stumpfer ist. Die Aufgabe selbst wird endlich unmöglich, wenn die anzutragenden Winkel zusammen zwei Rechten gleich sind, denn in diesem Falle werden die Schenkel der Winkel parallel laufen, und sich also nie durchschneiden.

§. 28.

Aufgabe. Es ist eine Linie gegeben und zwei Punkte ausserhalb derselben. Man soll einen Punkt in der gegebenen Linie so bestimmen, daß zwei von ihm auf die gegebenen Punkte gezogene Linien zwei gleiche Winkel an der Linie erzeugen.

Auflösung. Fig. 36. Die gegebene Linie heiße AB, die Punkte ausserhalb derselben P und Q. Man ziehe von einem Punkte z. B. P eine senkrechte Linie nach §. 6. auf AB, welche dieselbe in C durchschneidet, und verlängere dieselbe

auf der entgegengesetzten Seite, daß die Verlängerung DC der Linie PC gleich werde; verbinde den Endpunkt D dieser Verlängerung mit dem andern Punkt Q durch eine gerade Linie, so ist der Durchschnittspunkt M dieser und der gegebenen Linie AB der gesuchte Punkt.

Beweis. Man ziehe die Linie MP. Da die Linie PD auf AB senkrecht steht, so ist der Winkel x und der Winkel y ein rechter und beide einander gleich, ebenso ist vermöge der Construction die Linie CP = CD. Die Linie MC erzeugt mit den genannten und den Linien MP und MD zwei Dreiecke, welche congruent sind, weil sie zwei Linien und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben. Hieraus folgt ferner: daß die Winkel r und s als gleichen Seiten gegenüberstehend, einander gleich sind. Nun ist der Winkel r dem Winkel v gleich, weil es Scheitelwinkel sind, und hieraus fliest, da r = s ist, daß der Winkel v dem Winkel s gleich ist, d. h. die von dem Punkte M auf die Punkte Q und P gezogenen Linien bilden zwei, an der Linie AB gelegene gleiche Winkel.

§. 29.

Aufgabe. Es sind zwei in einem Punkte sich vereinigende Linien und ein Punkt zwischen beiden gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine Linie so legen, daß die Winkel, welche sie mit den beiden Linien macht, einander gleich sind.

Auflösung. Fig. 37. Die Linien seyen AB und AC und der gegebene Punkt sey D. Man ziehe von dem gegebenen Punkte D auf eine Linie AB eine Linie DE parallel mit der gegenüberliegenden Linie, trage von dem Durchschnittspunkte E aus die Linie DE auf die Linie AB auf, wodurch die Linie EF entsteht, ziehe von F durch den gegebenen Punkt D eine gerade Linie FG auf die gegenüberliegende Linie, so ist diese die verlangte Linie.

Beweis. Die Linie ED und die Linie EF sind gleich groß, also ist das Dreieck ein gleichschenkliges Dreieck und die

beiden

beiden Winkel an der Grundlinie x und y sind einander gleich. Da die Linie ED parallel mit der Linie AG geht, und beide von FG durchschnitten werden, so ist der Winkel y dem x', als der innere dem äusseren entgegengesetzten, gleich. Da aber x auch dem Winkel y gleich ist, so kann x statt y gesetzt werden, und es ist $x = x'$.

Die Linie FG bildet die beiden sich gleichen Winkel und gehet durch den Punkt D, daher leistet sie den Anforderungen der Aufgabe Genüge.

§. 30.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ausser ihr ein Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie so legen, daß die von den Endpunkten der gegebenen Linie gefällten senkrechten in bestimmten Entfernungen von dem gegebenen Punkte abstehen.

Auflösung. Fig. 38. Das Entfernungs-Verhältniß der senkrechten Linie von dem gegebenen Punkt sey n : m. Die gegebene Linie sey AB und der Punkt C. Man theile die gegebene Linie AB in das gegebene Verhältniß n : m nach §. 12. und bemerke den Punkt D, welcher die Linie in das Verhältniß von n : m theilt, verbinde diesen Punkt mit dem gegebenen durch die Linie DC, errichte auf dieser in den Punkt C eine senkrechte Linie FG, und ziehe von den Endpunkten A und B die Linien AF und BG parallel mit der Linie DC, so werden ihre Entfernungen von dem Punkte D im Verhältnisse n : m stehen.

Beweis. Man vollende das Dreieck APF durch die Linien BP und PG. Vermöge der Construction sind die Linien AF und BG mit DC parallel, und stehen, da DC senkrecht auf FG aufsteht, auch senkrecht auf dieser Linie auf. Da nun die, zwischen Parallel-Linien liegenden, Abschnitte zweier gegen sich geneigter Durchschnitts-Linien unter sich in gleichem Verhältnisse stehen, so erhält man folgende Proportion:

$$AD : DB = FC : CG;$$

da nun die Linie AD und DB zu einander in dem Verhältniſſe wie n : m ſtehen, ſo iſt auch

$$FC : CG = n : m$$

d. h. die Abſchnitte und Entfernungen, welche durch die, ſenkrecht von den Endpunkten der Linie AB auf FG gefällten, Linien hervorgebracht werden, ſtehen in dem Verhältniß n : m, und entſprechen alſo den Forderungen der Aufgabe.

§. 31.

Aufgabe. Es ſind zwei unbeſtimmte Linien ihrer Richtung nach und zwei begränzte gegeben. Man ſoll einen Punkt zwiſchen den unbeſtimmten Linien angeben, deſſen ſenkrechter Abſtand von beiden den gegebenen begränzten Linien gleich iſt. Fig. 59.

Auflöſung. Die unbegränzten Linien ſeyen AB und CD, die beiden Abſtands-Linien EF und GH. Man errichte auf einer der beiden unbeſtimmten Linien AB, die eine Linie EF, gegen CD zu, ſenkrecht, und auf der andern Linie CD die GH ſenkrecht, und ziehe durch ihre Endpunkte F und H mit den Linien, worauf ſie ſtehen, die Parallel-Linien MD und FD; verlängere ſie ſo, daß ſie ſich durchſchneiden, ſo iſt ihr Durchſchnittspunkt Q der geſuchte.

Beweis. Die gegebene Linie GH iſt auf der Linie CD und die Linie EF iſt auf AB ſenkrecht errichtet. Die Linie HQ iſt mit CD parallel gezogen, alſo ſind alle zwiſchen beiden Parallel-Linien ſenkrecht errichteten Linien einander und der gegebenen Linie HG gleich. Das Nämliche gilt auch von der mit der Linie AB parallel gezogenen Linie QF. Beide Parallelen vereinigen ſich in dem Punkte Q, alſo iſt der Punkt Q, von welchem aus die ſenkrechten Abſtände QN und QM auf die Linie AB und CD gezogen ſind, den gegebenen Linien EF und GH gleich.

§. 32.

Aufgabe. Es ſind zwei unbeſtimmte Linien ihrer Richtung nach gegeben, und zwei begränzte. Man

soll einen, ausser ihnen gelegenen, Punkt finden, dessen senkrechter Abstand von beiden den gegebenen begränzten Linien gleich ist. Fig. 40.

Auflösung. Die unbegränzten Linien seyen AB und CD, die beiden Abstandslinien EF und GH. Man errichte nach einerlei Richtung hin auf den Linien AB und CD die Linien EF und GH senkrecht und ziehe durch ihre Endpunkte mit den Linien, worauf sie stehen, Parallel-Linien; verlängere sie so, daß sie sich durchschneiden, so ist ihr Durchschnittspunkt Q der gesuchte, und die Linie MQ und NQ sind den gegebenen Linien EF und GH gleich.

Der Beweis führt sich leicht nach §. 31.

Anmerkung. Es ist leicht ersichtlich, daß zwei Fälle möglich sind für diese Aufgabe. Die Aufgabe ist nämlich zweimal möglich, wenn der Punkt ausserhalb der Linie liegen soll, denn die Linien GH und MQ lassen sich so auf beiden Linien AB und CD senkrecht errichten, daß ihr Vereinigungspunkt Q auf die Seite von AB fällt, oder so, daß er auf die entgegengesetzte Seite von CD fällt. Eine ähnliche Bemerkung gilt von der Aufgabe des §. 31.

Laufen die beiden Linien AB und CD parallel, so ist die Aufgabe, zwischen ihnen einen Punkt zu bestimmen, nur dann möglich, wenn die beiden Parallelen um die Summe der gegebenen begränzten Linien von einander abstehen. Die Bestimmung des Punktes ausserhalb der Linien ist nur dann möglich, wenn die eine Linie dem senkrechten Abstand beider Parallelen voneinander und der andern begränzten Linie gleich kommt.

§. 33.

Aufgabe. Es sind zwei Linien ihrer Größe und Richtung nach gegeben. Man soll einen Punkt angeben, von wo aus sich mit diesen beiden Linien zwei gleichschenklige Dreiecke beschreiben lassen. Fig. 41.

Auflösung. Die Linien seyen AB und EC. Man halbire die beiden Linien nach §. 9. und errichte

Diese Aufgabe läßt sich auf gleich einfache Art lösen, wenn unter den nämlichen Bedingungen ausserhalb der ihrer Richtung nach gegebenen Linien ein Punkt gesucht werden soll, welcher den Forderungen genügt.

Sind die beiden, ihrer Lage nach gegebenen, Linien parallel und die Winkel rechte, so ist die Auflösung für einen Zwischenpunkt nur dann möglich, wenn der senkrechte Abstand der Parallelen der Summe der gegebenen Linien gleich kommt, für einen ausserhalb gelegenen aber nur dann, wenn der Abstand von der einen dem Unterschied beider Linien gleich ist. §. 31 und 32.

§. 35.

Aufgabe. Es sind zwei Linien ihrer Lage nach gegeben. Man soll zwischen beide eine gegebene Linie so legen, daß sie mit ihren Endpunkten auf beide Linien auffalle, und mit der einen einen bestimmten Winkel bilde. Fig. 43.

Auflösung. Die beiden unbestimmten Linien seyen AB und AC, die gegebene Linie GK, der Winkel x. Man trage an irgend einem Punkte in der Linie AC die gegebene Linie GK unter dem Winkel x an, und ziehe durch ihren Endpunkt D mit der Linie, worauf sie aufsteht, eine Parallele so, daß sie, gehörig verlängert, die andere unbestimmte Linie AB durchschneide. Man trage nun von diesem Durchschnittspunkte D der beiden Linien die gegebene Linie ED = GK auf, so wird der Winkel den sie mit der Linie AC bildet, dem gegebenen Winkel gleich seyn.

Beweis. Man ziehe die Linie DG, so entstehen dadurch zwei Dreiecke DGK und DEG, welche einander congruent sind, weil in ihnen der Winkel z = z′ und v = v′, als Wechselwinkel, die Linie DG, als zu beiden Dreiecke gehörig, sich selbst gleich ist, und durch eine Seite und die zwei anliegenden Winkel ein Dreieck bestimmt wird. Hieraus folgt die Gleichheit der Winkel y und y′. Nun ist aber auch der Winkel x = y, weil es Wechselwinkel zwischen zwei Parallelen sind; also fließt hieraus auch die Gleichheit des Winkels x und y′. Demnach ist also die Linie DE der gegebenen gleich und bildet mit AC den gegebenen Winkel.

§. 36.

Aufgabe. Es sind drei Linien gegeben. Man soll sie an einem Punkte unter solchen Winkeln zusammenstellen, daß ihre Endpunkte in einer geraden Linie liegen und gleich weit von einander abstehen. Fig. 44.

Auflösung. Die drei gegebenen Linien seyen F'E', G'E', K'E'. Man nehme die kleinste von ihnen, und setze sie doppelt aneinander, wodurch EFD entsteht; beschreibe über ihr mit den beiden andern Linien das Dreieck GED, so daß GE = G'E' und K'E' = GD ist, ziehe von der Spitze dieses Dreiecks durch den Mittelpunkt F der Linie ED eine andere GK, welche doppelt so groß, als der Abstand dieses Mittelpunkts von der Spitze des Dreiecks ist, und verbinde den Endpunkt K der Linie GK mit dem der Linie ED, so ist die Aufgabe gelöset, und EG, EF, EK sind in dem Punkte E vereinigt.

Beweis. Vermöge der Construction ist die Linie EG = E'G', EF = E'F', GD = K'E'; EF = FD, GF = FK. Da nun die Winkel x und y als Scheitelwinkel einander gleich sind, so folgt hieraus, daß die Dreiecke GFD und EFK congruent, also auch, daß die Linien GD und EK einander gleich sind. Da nun GD = K'E' ist, so ist auch EK = K'E'. Hieraus fließt also, daß sich die drei gegebenen Linien in einem Punkte E vereinigen, und daß ihre Endpunkte G, F, K auf der geraden Linie GK so aufstehen, daß dadurch diese Linie in zwei gleiche Theile getheilt wird.

§. 37.

Aufgabe. Es sind drei Linien gegeben; man soll sie an einem Punkte unter solchen Winkeln aneinander stellen, daß ihre Endpunkte auf einer geraden Linie so auffallen, daß sie dieselbe nach einem bestimmten Verhältnisse theilen. Fig. 45.

Die drei Linien seyen EF, EG, EK, und das Verhältniß, wornach die Linie durch das Auffallen ihrer Endpunkte getheilt werden soll, sey 2 : 3.

Auflösung. Man nehme die kleinste der drei Linien, hier EF, theile sie nach §. 11. in drei Theile, setze die ganze Linie und $\frac{2}{3}$ von ihr in gerader Linie ED zusammen, bemerke den Punkt F, der die ganze Linie und $\frac{2}{3}$ trennt, bestimme eine Linie DG, welche $\frac{2}{3}$ von EK ist, beschreibe mit den beiden andern Linien EF und EG über der Linie ED ein Dreieck EDG, und ziehe von seiner Spitze G durch den Punkt F eine gerade Linie GK so, daß ihre Verlängerung FK $\frac{2}{3}$ von GF sey, und verbinde die beiden Endpunkte E und K durch eine gerade Linie EK, so wird diese der dritten Linie gleich seyn und der Aufgabe ein Genüge thun.

Beweis. Die Linien EF und EG sind den gegebenen Linien gleich, DF ist $\frac{1}{3}$ von EF, und GF $\frac{2}{3}$ von FK. Die Linie GD ist $\frac{1}{3}$ von EK. Der Winkel x und y sind als Scheitelwinkel einander gleich. Da nun FD in dem nämlichen Verhältniß zu EF steht, wie GF zu FK, und die Linien GF, DF und EF, FK in zwei Dreiecken einen gleichen Winkel einschließen, so folgt hieraus die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke, wozu sie gehören, und also auch folgende Proportion

$$GF : FK = GD : EK.$$

Da nun GF sich zu FK wie 2 : 3 verhält, so steht auch GD : EK im nämlichen Verhältnisse, GD aber ist $\frac{1}{3}$ von EK, also ist auch EK der gegebenen dritten Linie gleich, und hieraus folgt also, daß die Endpunkte der drei gegebenen Linien in gerader Richtung auf einer Linie liegen, welche dadurch in das Verhältniß wie 2 : 3 getheilt ist.

Anmerkung. 1) Soll die Linie, worauf die Endpunkte der gegebenen Linien aufstehen sollen, nach dem Verhältnisse n : m eingetheilt werden, so mache man nach §. 13. die Linie $DF = \frac{n}{m}$ von EF oder der gegebenen A, die Verlängerung FK aber $\frac{m}{n}$ von GF und vervollständige die Figur, so ist das Verlangte geschehen.

2) Aus der Auflösung zu dieser und der vorhergehenden Aufgabe entnimmt sich für das Verhältniß der gegebenen Linien unter einander folgendes: Die kleinste von den drei Linien muß so beschaffen seyn, daß sie doppelt genommen, oder daß dieselbe und der $\frac{n}{m}$te Theil von ihr kleiner ist, als die beiden Linien GD und EG.

weil ſonſt die Zeichnung des Dreiecks EGD und dadurch auch die Auflöſung der Aufgabe unmöglich wird.

§. 38.

Aufgabe. Einen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen. Fig. 46.

Erſte Auflöſung. Der gegebene Winkel ſey BAC. Man ſchneide von der Spitze des Winkels A aus auf beiden Schenkeln zwei gleiche Stücke ab, AB und AC, und beſchreibe von den ſo eben erhaltenen Durchſchnittspunkten zwei ſich durchſchneidende Kreisbögen, und verbinde die Spitze des Winkels A mit dem Durchſchnittspunkte der Kreisbögen F durch eine gerade Linie, ſo halbirt die Linie AF den gegebenen Winkel.

Beweis. Die Linien AD und AC, eben ſo die Linien DF und EF ſind vermöge der Conſtruction einander gleich. Die Linie AF theilt die Figur AD FE in zwei congruente Dreiecke ADF und AEF, weil ſie beiden zugehört. Hieraus folgt, daß der Winkel DAF dem Winkel EAF gleich und alſo der Winkel BAC in zwei gleiche Theile getheilt iſt.

Zweite Auflöſung. Fig. 47. Der gegebene Winkel ſey BAC. Man ſchneide auf beiden Schenkeln zwei gleiche Stücke AD und AE ab, trage rückwärts von der Spitze des Winkels A den einen Schenkel AD = AF nach irgend einer Richtung, und verbinde den Endpunkt F der Linie AF mit den beiden Punkten D und E der Schenkel AD und AE, ſo iſt der Winkel EFD die Hälfte des gegebenen.

Beweis. Man verlängere die Linie FA nach G, daß ſie den gegebenen Winkel in zwei Theile p und q trenne. Da die Linien AF, AD und AE vermöge der Conſtruction einander gleich ſind, ſo erzeugt die Linie FG zwei gleichſchenklige Dreiecke mit zwei, auſſerhalb derſelben an der verlängerten Grundlinie FAG gelegenen, Winkeln p und q. In den gleichſchenkligen Dreiecken FDA und FAE ſind die beiden Winkel x und x', y und y' einander gleich; alſo kann man ſie unter ſich verwechſeln. Da nun der äuſſere durch die verlängerte Grundlinie entſtandene Winkel den beiden innern im Dreiecke gegenüber ſtehenden Winkeln gleich iſt, ſo iſt $p = x + x' = 2x$,

und $q = y + y' = 2y$,

auf der entgegengesetzten Seite, daß die Verlängerung DC der Linie PC gleich werde; verbinde den Endpunkt D dieser Verlängerung mit dem andern Punkt Q durch eine gerade Linie, so ist der Durchschnittspunkt M dieser und der gegebenen Linie AB der gesuchte Punkt.

Beweis. Man ziehe die Linie MP. Da die Linie PD auf AB senkrecht steht, so ist der Winkel x und der Winkel y ein rechter und beide einander gleich, ebenso ist vermöge der Construction die Linie CP = CD. Die Linie MC erzeugt mit den genannten und den Linien MP und MD zwei Dreiecke, welche congruent sind, weil sie zwei Linien und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben. Hieraus folgt ferner: daß die Winkel r und s als gleichen Seiten gegenüberstehend, einander gleich sind. Nun ist der Winkel r dem Winkel v gleich, weil es Scheitelwinkel sind, und hieraus fliest, da r = s ist, daß der Winkel v dem Winkel s gleich ist, d. h. die von dem Punkte M auf die Punkte Q und P gezogenen Linien bilden zwei, an der Linie AB gelegene gleiche Winkel.

§. 29.

Aufgabe. Es sind zwei in einem Punkte sich vereinigende Linien und ein Punkt zwischen beiden gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine Linie so legen, daß die Winkel, welche sie mit den beiden Linien macht, einander gleich sind.

Auflösung. Fig. 37. Die Linien seyen AB und AC und der gegebene Punkt sey D. Man ziehe von dem gegebenen Punkte D auf eine Linie AB eine Linie DE parallel mit der gegenüberliegenden Linie, trage von dem Durchschnittspunkte E aus die Linie DE auf die Linie AB auf, wodurch die Linie EF entsteht, ziehe von F durch den gegebenen Punkt D eine gerade Linie FG auf die gegenüberliegende Linie, so ist diese die verlangte Linie.

Beweis. Die Linie ED und die Linie EF sind gleich groß, also ist das Dreieck ein gleichschenkliges Dreieck und die

beiden

beiden Winkel an der Grundlinie x und y sind einander gleich. Da die Linie ED parallel mit der Linie AG geht, und beide von FG durchschnitten werden, so ist der Winkel y dem x', als der innere dem äusseren entgegengesetzten, gleich. Da aber x auch dem Winkel y gleich ist, so kann x statt y gesetzt werden, und es ist $x = x'$.

Die Linie FG bildet die beiden sich gleichen Winkel und gehet durch den Punkt D, daher leistet sie den Anforderungen der Aufgabe Genüge.

§. 30.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ausser ihr ein Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie so legen, daß die von den Endpunkten der gegebenen Linie gefällten senkrechten in bestimmten Entfernungen von dem gegebenen Punkte abstehen.

Auflösung. Fig. 38. Das Entfernungs-Verhältniß der senkrechten Linie von dem gegebenen Punkt sey n : m. Die gegebene Linie sey AB und der Punkt C. Man theile die gegebene Linie AB in das gegebene Verhältniß n : m nach §. 12. und bemerke den Punkt D, welcher die Linie in das Verhältniß von n : m theilt, verbinde diesen Punkt mit dem gegebenen durch die Linie DC, errichte auf dieser in den Punkt C eine senkrechte Linie FG, und ziehe von den Endpunkten A und B die Linien AF und BG parallel mit der Linie DC, so werden ihre Entfernungen von dem Punkte D im Verhältnisse n : m stehen.

Beweis. Man vollende das Dreieck APF durch die Linien BP und PG. Vermöge der Construction sind die Linien AF und BG mit DC parallel, und stehen, da DC senkrecht auf FG aufsteht, auch senkrecht auf dieser Linie auf. Da nun die, zwischen Parallel-Linien liegenden, Abschnitte zweier gegen sich geneigter Durchschnitts-Linien unter sich in gleichem Verhältnisse stehen, so erhält man folgende Proportion:

$$AD : DB = FC : CG;$$

§. 41.

Aufgabe. Einen Winkel, der nicht größer ist, als die Hälfte eines rechten Winkels, zu verdreifachen. Fig. 50.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC. Man verlängere den einen Schenkel AC auf beiden Seiten des Punktes A, beschreibe mit irgend einem Stück des andern Schenkels AB ein gleichschenkliges Dreieck ADC über AC, und verlängere unbestimmt die Linie DC in gerader Richtung, gegen den Punkt A zu. Nun beschreibe man mit AD als Radius um den Punkt A einen Kreis, so daß seine Peripherie die verlängerte Linie DC in E schneide, und ziehe von diesem Durchschnittspunkte auf den Punkt A eine Linie, so ist der Winkel EAF dreimal so groß als der gegebene.

Beweis. Der Winkel BAC ist der gegebene Winkel, das Dreieck ADC ist ein gleichschenkliges, und somit sind die beiden Winkel an der Grundlinie x und y einander gleich. Aus dem Punkte A ist mit AD als Radius der Kreis FED gezogen. Demnach sind die Linien AE und AD als seine Radien einander gleich, und bilden mit der Sehne ED ein gleichschenkliges Dreieck, worin die beiden Winkel an der Grundlinie z und v einander gleich sind. Der äussere Winkel eines Dreiecks ist, wie bekannt, den beiden innern gegenüberstehenden gleich; hieraus fließt $< z = y + x = 2x$,

ferner ist $< m = v + y$.

Da nun anstatt v der Winkel z und anstatt y der Winkel x, als ihm gleich, gesetzt werden kann, so geht die vorige Gleichung über in $< m = z + x = 2x + x$,

und der Winkel m ist also dreimal so groß, als der gegebene Winkel.

Anmerkung. Die Aufgabe, die hier durch Construction gelöst ist, hätte auch mechanisch durch zweimaliges Anreihen des gegebenen Winkels bewirkt werden können, und dieß muß geschehen, wenn der gegebene Winkel größer, als die Hälfte eines rechten Winkels ist. Die Größe des Winkels M wird bestimmt durch die Linie FA und durch die Linie, welche von dem Durchschnittspunkte E auf die Spitze des Winkels A gefällt wird. So lange nun die Linie CE so fällt, daß sie die Peripherie durchschneidet, so lange wird die

mitgetheilte Auflösung möglich seyn. Dieß hängt von der Größe des Winkels BAC ab. Ist nämlich der Winkel ADC ein stumpfer, so wird die Linie CE die Peripherie durchschneiden, ist er ein rechter, so wird die Linie EC die Peripherie berühren, ist er ein spitzer, so wird die Linie EC die Peripherie weder durchschneiden, noch berühren, sondern in irgend einer Entfernung ausserhalb der Kreislinie liegen, und also in letztem Falle der Auflösung obiger Aufgabe nicht genügen, wo denn die Aufgabe auf die mechanische Methode gelöst werden muß. Beträgt der Winkel, der verdreifacht werden soll, die Hälfte eines Rechten, so fällt Durchschnitts- und Berührungspunkt zusammen, der Ergänzungswinkel selbst ist der verlangte und dreimal größer, als die Hälfte eines Rechten. Ist der gegebene Winkel größer als die Hälfte eines Rechten, so kann man ihn in zwei Winkel zerlegen, und auf die angegebene Art verfahren.

§. 42.

Aufgabe. Einen Winkel, der nicht größer als die Hälfte eines Rechten ist, sechsmal zu vergrößern.

Auflösung. Man construire nach §. 41. einen Winkel, welcher dreimal so groß ist, als der gegebene, und verdoppele denselben nach §. 40., so ist das Verlangte geschehen.

Der Beweis entlehnt sich leicht aus den §§. 40 und 41.

§. 43.

Aufgabe. Einen Winkel zu construiren, der um die Hälfte größer als ein gegebener ist. Der Gegebene darf aber nicht größer als die Hälfte eines Rechten seyn.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC. Man construire nach §. 41. einen Winkel, der dreimal so groß als der gegebene ist, und halbire den gefundenen nach §. 38.

Der Beweis entlehnt sich leicht aus den §§. 38 und 41.

§. 44.

Aufgabe. Es ist ein Winkel gegeben. Man soll einen Punkt bestimmen, der mit zwei, von ihm aus auf die Endpunkte der Schenkel des gegebenen

Winkels gezogenen, Linien einen Winkel erzeuge, welcher doppelt so groß, als der gegebene ist. Fig. 51.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC. Man halbire die beiden Schenkel des gegebenen Winkels und errichte auf ihren Mittelpunkten M und M' zwei senkrechte Linien, die sich, gehörig verlängert, durchschneiden, so ist ihr Durchschnittspunkt P der gesuchte Punkt, und der von ihm aus durch die beiden, auf die Endpunkte B und C der Schenkel AB und AC gefällten, Linien erzeugte Winkel BPC doppelt so groß, als der gegebene.

Beweis. Man ziehe von der Spitze A des gegebenen Winkels BAC durch den gefundenen Punkt P die Linie APD, so wird dadurch der gegebene Winkel BAC in den Winkel x und y und der gefundene BPC in den Winkel v und z getheilt. Da der Schenkel AB in M' halbirt und die Linie M'P senkrecht auf dem Halbirungspunkt aufgesetzt ist, so sind alle Linien, welche von einem gemeinschaftlichen Punkte in der Linie M'P auf die Endpunkte der Linie AB gezogen sind, einander gleich und bilden mit der Linie AB ein gleichschenkliges Dreieck. Somit ist also das Dreieck ABP ein gleichschenkliges und der Winkel x dem Winkel x' gleich. Da nun der durch Verlängerung der Grundlinie entstandene Winkel den beiden innern entgegengesetzten gleich ist, so ist

$$\sphericalangle v = x + x',$$

oder da x für x' gesetzt werden kann

$$\sphericalangle v = 2x.$$

Auf gleiche Art wird auch bewiesen, daß

$$\sphericalangle z = 2y.$$

Hieraus ergibt sich durch Zusammenzählen der beiden Winkel

$$v + z = 2x + 2y,$$

oder

$$v + z = 2(x + y)$$

und wenn statt $v + z$ der ihnen gleiche Winkel BPC und statt $x + y$ der gegebene gesetzt wird, so entsteht

$$\sphericalangle BPC = 2 \sphericalangle BAC,$$

d. h. der gefundene Winkel BPC ist doppelt so groß als der gegebene BAC, oder der auf obige Art gefundene Punkt er-

zeugt mit den beiden Endpunkten der Schenkel des Winkels einen Winkel, welcher doppelt so groß, als der gegebene, ist.

Anmerkung. Der gesuchte Punkt P wird entweder zwischen die beiden Schenkel des gegebenen Winkels, oder auf einen derselben, oder ausserhalb beider fallen, was leicht aus dem Zusammentreffen der beiden senkrechten Linien M'P und MP erhellt. Der gesuchte Punkt wird in den einen Schenkel fallen, wenn die auf dem Mittelpunkte des einen Schenkels aufgesetzte senkrechte Linie in den Mittelpunkt des andern fällt. Er wird zwischen beide Schenkel fallen, wenn die Linie, welche die Mittelpunkte der beiden Schenkel mit einander verbindet, größer ist, als jede der beiden senkrechten Linien M'P oder MP; er wird ausserhalb von ihnen fallen, wenn diese Mittelpunktslinie kleiner als eine der senkrechten M'P oder MP ist.

Für den Fall, als die senkrechte Linie MP in den Mittelpunkt P des Schenkels AC fällt, ist der Beweis Fig. 52. ganz einfach, denn der Winkel x ist dem Winkel x' gleich, als Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, also ist

$$< BPC = 2\,x, \quad \text{oder} \quad < BPC = 2\,BAC.$$

Der Beweis für den Fall, als der Punkt P ausserhalb der beiden Schenkel fällt, gibt sich auf folgende Art (Fig. 53). Das Dreieck ABP ist ein gleichschenkliges, weil die Linie AP der Linie BP gleich ist, und also sind auch die beiden Winkel an der Grundlinie AB, x und x' einander gleich, und diesen beiden, oder einem von ihnen, doppelt genommen ist der äussere Winkel BPD gleich. Hieraus fließt

$$2.\ < x = BPD \text{ oder } 2 < (v + y) = BPC + CPD.$$

Um aus dieser Gleichung die ursprünglichen Winkel BAC und BPC abzuleiten, müssen die Winkel y und CPD ausgeschieden werden. Dieß geschieht leicht, wenn man berücksichtigt, daß APC ein gleichschenkliges Dreieck ist und daß deßwegen seine Winkel an der Grundlinie AC, y und y' einander gleich sind, und der äussere CPD beiden zusammen, oder einem von ihnen, doppelt genommen, gleich ist. Hieraus fließt

$$2 < y = CPD.$$

Wird diese Gleichung von der obigen abgezogen, so entsteht

$$2 < v + 2 < y - 2 < y = BPC + CPD - CPD,$$

$$\text{oder} \quad 2 < v = BPC, \quad 2 < BAC = BPC,$$

also ist der, auf obige Art gefundene, Punkt der gesuchte.

§. 45.

Aufgabe. Es ist irgend ein Winkel und eine Linie gegeben, man soll die Linie so mit den Schenkeln des gegebenen Winkels verbinden, daß ihre End-

punkte in die beiden Schenkel fallen und gleiche Stücke, von dem Scheitelpunkte des Winkels aus, auf ihnen abschneide. Fig. 52.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC, die Linie DE. Man schneide von der Spitze des Winkels A aus auf beiden Schenkeln zwei gleiche Stücke AD und AE ab, lege durch die Punkte D und E die gegebene Linie DE = DG, daß sie mit ihrem einen Endpunkte D auf den einen Schenkel in D aufstehe und mit dem andern in gerader Richtung auf G entweder zwischen oder ausserhalb der Schenkel des gegebenen Winkels falle. Ziehe von dem andern Endpunkte G mit dem gegenüber liegenden Schenkel AB eine Linie parallel, so daß sie den Schenkel AC in irgend einem Punkte N trifft. Durch diesen Punkt lege man eine Linie mit DG parallel, so wird diese Linie MN den Forderungen Genüge leisten.

Beweis. Es ist zweierlei zu beweisen: 1) daß die Linie MN der Linie DE, und daß 2) die beiden abgeschnittenen Stücke einander gleich sind. Man ziehe die Hülfslinie MG, so ist, da DG mit MN und GN mit DM vermöge der Construction parallel läuft, der Winkel y = v und x = z als Wechselwinkel. Die Linie MG erzeugt mit den Linien DG, MD und GN, MN zwei Dreiecke DGM und MGN, welche einander congruent, da in ihnen eine Linie und die anliegenden Winkeln gleich sind. Hieraus folgt, daß die Linie MN mit DG gleich ist.

2) Die Linie MN läuft mit DE parallel. Durch die Linie DE wird also das Dreieck AMN in zwei ähnliche Dreiecke zerlegt, wornach also folgende Proportion gilt

$$AD : AE = AM : AN.$$

Da nun die Linie AD und AE in dem Verhältniß der Gleichheit steht, so folgt aus obiger Proportion, daß auch die Linien AN und GN in der nämlichen Beziehung unter sich stehen müssen. Hieraus fließt also, daß die Linie MN der gegebenen Linie DE gleich, mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln aufgestellt ist, und von ihnen gleiche Stücke abschneidet.

§. 46.

Aufgabe. Es ist ein Winkel von unbestimmten Schenkeln und eine Linie gegeben. Man soll die gegebene Linie so zwischen die beiden Schenkel des Winkels legen, daß ihre Endpunkte in dieselben fallen und sie mit dem Einen einen bestimmten Winkel bilde. Fig. 55.

Auflösung. Der gegebene Winkel mit unbestimmten Schenkeln sey BAC, die Linie DE, der Winkel, den die Linie DE mit dem einen Schenkel bilden soll, sey x. Man trage auf irgend einem Punkte D' eines der beiden Schenkel, die gegebene Linie DE = D'E' unter dem gegebenen Winkel x an; ziehe durch den Endpunkt E' der Linie D'E' mit dem Schenkel D'A, worauf sie aufsteht, eine Paralle E'E, welche den andern Schenkel AC in dem Punkte E trifft, schneide von D' aus die Linie D'D = E'E auf D'A ab und verbinde die beiden Punkte D'E durch eine gerade Linie DE mit einander, so ist diese Linie die gesuchte.

Beweis. Die Linie D'D läuft mit der Linie E'E parallel und ist ihr gleich. Da nun die Linien D'E' und DE zwischen zwei gleichen Parallel-Linien eingeschlossen sind, so sind sie selbst einander gleich und parallel. Hieraus ergibt sich also, daß der Winkel ADE dem Winkel x und die Linie DE der gegebenen gleich ist.

Anmerkung. Soll die Linie so zwischen die beiden Schenkel AB und AC gelegt werden, daß sie mit beiden gleiche Winkel bilde, so fällt sie mit der Aufgabe des vorigen §. zusammen.

§. 47.

Aufgabe. Es ist ein Winkel und ein zwischen seinen Schenkeln liegender Punkt gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt zwischen die Schenkel des Winkels eine Linie so legen, daß die hierdurch

entſtandene Zwiſchenlinie durch dieſen Punkt in zwei gleiche Theile getheilt werde.

Erſte Auflöſung. Fig. 56. Der Winkel ſey BAC, der gegebene Punkt D. Man ziehe von dem Vereinigungspunkt A der beiden Schenkel durch den Punkt D eine gerade Linie AG ſo, daß ſie doppelt ſo groß werde, als die Entfernung des gegebenen Punktes D von dem Vereinigungspunkte A der beiden Schenkel. Ziehe von dem Endpunkte G der Zwiſchen-Linie AG auf einen der beiden Schenkel AC eine Parallele GM mit der gegenüberſtehenden, daß ſie erſtere in M durchſchneide, und ziehe von dieſem Durchſchnittspunkte M durch den gegebenen Punkt M eine die Linie AB ſchneidende Linee MDK, ſo iſt dieß die verlangte Linie.

Beweis. Man ziehe die Linie KG. Die Linie GM iſt parallel gezogen mit AK, die Linie AD iſt der Linie DG gleich. Die Linie MK und AG durchſchneiden die beiden parallel laufenden Linien. Nun ſind die beiden innern Wechſelwinkel z und v, und die beiden Scheitelwinkel y und x, und ebenſo, vermöge der Conſtruction, die Linien AD und DG einander gleich. Da eine Linie und die beiden anliegenden Winkel Größe und Geſtalt eines Dreiecks beſtimmen, ſo ſind alſo die beiden Dreiecke ADK und MDG congruent, alſo auch die Linien, welche gleichen Winkeln gegenüberſtehen, gleich, und demnach iſt alſo die Linie MD der Linie DK gleich, und der Punkt MD liegt in der Mitte zwiſchen M und K.

2te Auflöſung. Fig. 57. Man ſetze an den Punkt A unter irgend einem Winkel eine gerade in zwei gleiche Theile getheilte Linie AGF an, ziehe von dem gegebenen Punkt D eine Linie DE auf die mittlere Linie AC parallel mit der gegenüberliegenden AB und verbinde den Mittelpunkt G der Linie AF mit dem Punkte E und ziehe durch den Endpunkt F eine Linie parallel mit DE, daß ſie die mittlere Linie treffe, und ziehe von dieſem Punkt K durch den gegebenen Punkt D eine Linie auf die gegenüberliegende Linie, ſo wird der Punkt D die Linie KM in zwei gleiche Theile theilen.

Beweis. Da die Linie FK parallel mit GE gezogen iſt, ſo entſtehen zwei Dreiecke FAK und GAE, welche einander ähnlich

ſind. Ebenſo entſtehen durch die, mit der Linie AM parallel gehende Linie EI) die zwei ähnlichen Dreiecke AHM und EKD, und es gelten daher in dieſen folgende Proportionen

$$AG : FG = AE : EK,$$

ferner $$AE : EK = MD : DK$$

und hieraus fließt folgende $$AG : FG = MD : DK.$$

Da nun nach der Conſtruction die Linie AG zu der Linie GF in dem Verhältniß der Gleichheit ſteht, ſo müſſen auch die Linien MD und DK in dem der Gleichheit ſtehen, und die Linie KM iſt durch den Punkt D in zwei gleiche Theile getheilt.

3te Auflöſung. Fig. 58. Man verbinde die Punkte D und A durch eine gerade Linie AD und trage durch den Punkt A in irgend einer Richtung die Linie FE ſo, daß FA = AE iſt, ziehe von den Punkten F und E mit der Linie AD die Parallelen FG und EK ſo, daß ſie die Linien AB und AC in den Punkten G und K durchſchneiden, verbinde dieſe durch die gerade Linie GK und ziehe mit ihr die Linie LM durch den gegebenen Punkt D parallel, ſo iſt LD = DM.

Beweis. Da die Linien FG und EK mit AH parallel ſind, ſo verhält ſich

$$FA : AE = GH : HK,$$

da aber die Linie FA der Linie AE gleich iſt, ſo iſt auch die Linie GH der Linie HK gleich.

Mit der Linie GK iſt die Linie LM parallel gezogen, demnach fließen aus den ähnlichen Dreiecken ALD und AGH, ADM und AHK folgende Proportionen

$$AH : HD = GH : LD,$$

und $$AH : HD = HK : DM,$$

und hieraus ergibt ſich folgende

$$GH : LD = HK : DM,$$

oder durch Verſetzung

$$GH : HK = LD : DM.$$

Da nun die Linien GH und HK einander gleich ſind, ſo ſind auch die Linien LD und DM einander gleich; demnach iſt die Linie LM ſo zwiſchen die beiden Linien AC und AB angetragen, daß ſie durch den Punkt D geht und durch den Punkt D in zwei gleiche Theile eingetheilt wird.

§. 48.

Aufgabe. Es ist ein Winkel und ein zwischen beiden Schenkeln liegender Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine gerade Linie so legen, daß die beiden durch den Punkt erzeugten Abschnitte in einem bestimmten Verhältnisse stehen.

Erste Auflösung. Fig. 59. Der Winkel sey BAC, der Punkt D, das Verhältniß, worin die beiden Abschnitte stehen sollen, sey 2 : 5.

Man ziehe von dem Vereinigungspunkte der beiden Schenkel auf den gegebenen Punkt eine Linie CD, theile sie in zwei gleiche Theile (§. 10.) setze einen dieser Theile von D aus fünfmal aneinander, wodurch die Linie AG gewonnen wird. Ziehe von dem Punkte G eine Linie GM auf den einen Schenkel mit der gegenüberstehenden parallel, und lege von dem Durchschnittspunkt M dieser Linie eine Linie durch den Punkt D, bis sie die gegenüberstehende Linie trifft, so wird der Punkt D die Linie MK nach dem verlangten Verhältnisse theilen.

Beweis. Die Linie MG geht parallel mit AB vermöge der Construction. Die Linie AG durchschneidet die beiden parallel laufenden Linien und erzeugt die beiden gleichen innern Wechselwinkel z und v. Die Winkel x und y sind als Scheitelwinkel einander gleich. Da die Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken, einzeln genommen, die Aehnlichkeit der Dreiecke bedingt, so sind die Dreiecke ADK und MDG einander ähnlich, und es stehen ihre Seiten in einem gleichen Verhältniß zu einander. Demnach ist also

$$AD : DG = KD : MD;$$

ferner ist vermöge der Construction

$$AD : DG = 2 : 5$$

und hieraus folgt ferner

$$DK : DM = 2 : 5.$$

Demnach ist eine Linie MK gefunden, welche der Punkt D in zwei Theile theilt, die in dem Verhältniß wie 2 : 5 stehen.

Zweite Auflösung. Fig. 60. Man setze eine aus sieben gleichen Theilen bestehende Linie AF unter irgend einem

Winkel an eine der gegebenen Linien an, bemerke den Durchschnittspunkt G, welcher die Linie nach dem gegebenen Verhältnisse theilt, ziehe von dem gegebenen Punkt D eine Linie DE auf die mittlere Linie parallel mit der gegenüberliegenden AC, verbinde die beiden Durchschnittspunkte E und G durch eine gerade Linie mit einander, und lege mit ihr durch den Punkt F eine Linie parallel, welche die mittlere Linie in H trifft, und ziehe durch diesen und den gegebenen Punkt D eine gerade Linie, so geht diese Linie durch D und ist in D nach dem verlangten Verhältniß getheilt.

Beweis. Die Linie FH geht parallel mit der Linie GE und dadurch wird die Linie AH in zwei mit den Linien AG und GF übereinstimmende Abschnitte getheilt. Die Linie ED ist in dem Dreiecke AHM parallel mit der Linie AM gezogen und wird also durch den Punkt D in zwei mit den Linien AE und EH übereinstimmende Abschnitte getheilt. Hieraus ergeben sich nun folgende Proportionen:

$$AG : GF = AE : EH,$$
$$\text{und} \quad AE : EH = MD : DH,$$
$$\text{also} \quad AG : GF = MD : DH.$$

Da nun AG zu GF in dem Verhältnisse wie 2 : 5 stehet, so müssen auch die Linien MD und DH im nämlichen Verhältnisse zu einander stehen, und man erhält

$$MD : DH = 2 : 5,$$

d. h. die Linie MH wird durch den Punkt D in das gegebene Verhältniß getheilt.

Dritte Auflösung. Fig. 61. Man trage auf der durch A gelegten Linie FE die Linien AE und FA so an, daß AE 2 und FA 5 unter sich gleiche Theile habe, ziehe von A aus auf D die gerade Linie AD und mit dieser von den Endpunkten F und E die Linien FG und EH parallel, verbinde die Endpunkte G und H dieser Linien durch die gerade Linie GH und mit ihr die Linie LM durch den gegebenen Punkt D parallel, so theilt der Punkt D die Linie LM nach dem gegebenen Verhältniß.

Der Beweis führt sich leicht nach dem, in der dritten Auflösung, zum vorigen §. Gesagten.

Anmerkung. Hätte eine Linie gefunden werden ſollen, welche durch den Punkt D in zwei, ſich wie m : n verhaltende, Stücke getheilt werden, ſo wird die Größe der Linie AG, AF oder FE nach §. 11. beſtimmt, und dann kann auf jede der drei angegebenen Auflöſungsarten verfahren werden.

§. 49.

Aufgabe. Es iſt ein Winkel von unbeſtimmten Schenkeln und zwiſchen beiden ein Punkt gegeben. Man ſoll von dieſem Punkte zwei Linien auf die Schenkel des Winkels ſo fällen, daß ſie in einem beſtimmten Verhältniß ſtehen, und die eine mit dem Schenkel, worauf ſie auffällt, einen beſtimmten Winkel bilde. Fig 62.

Auflöſung. Der Winkel von unbeſtimmten Schenkeln ſey BAC, der Punkt zwiſchen beiden D, das Verhältniß n : m, worin die beiden Linien zu einander ſtehen ſollen, ſey durch die Linien mn und mp angedeutet, der Winkel, unter welchem die eine auf den Schenkel auffallen ſoll, ſey x. Man verbinde die Spitze A des Winkels BAC durch eine gerade Linie AD mit dem Punkte D, und trage die kleinere Linie mn unter dem gegebenen Winkel x ſo auf den einen Schenkel AB auf, daß ihr anderer Endpunkt m in die Linie AD falle. An dieſen Punkt trage man die andere Linie mp ſo auf, daß ihr anderer Endpunkt in p in den Schenkel AC falle, darauf ziehe man durch den gegebenen Punkt D die Linie ED mit nm und DF mit mp parallel, ſo ſind dieſe Linien die geſuchten.

Beweis. Da die Linie ED mit nm und DF mit mp parallel gezogen iſt, ſo ſind die Dreiecke Anm und AED, Amp und ADF einander ähnlich. Hieraus fließen folgende Proportionen

$$Am : AD = nm : ED,$$
$$Am : AD = nm : DF,$$

und hieraus

$$nm : ED = mp : DF,$$

oder

$$nm : mp = ED : DF,$$

d. h. die von dem Punkte D auf die Schenkel AB und AC gezogenen Linien DE und DF ſtehen in dem Verhältniſſe, wie

die gegebenen Linien nm und mp. Da ferner die Linie nm unter dem Winkel x an AD aufgetragen wurde, und die Linie ED mit nm parallel läuft, ſo ſtehen alſo beide Linien in dem gegebenen Verhältniſſe und die eine fällt unter dem gegebenen Winkel auf den einen Schenkel AB auf.

Anmerkung. Die Aufgabe iſt immer möglich, ſobald die kleinere Linie unter dem gegebenen Winkel x zwiſchen die Schenkel, des durch Ziehung der Linie AD entſtandenen größern Partialwinkels eingetragen wird, wie ſich dieß leicht erkennen läßt. Im entgegengeſetzten Falle wird ſie nicht immer möglich ſeyn.

Die Aufgabe iſt leichter zu conſtruiren, wenn überhaupt nur verlangt wird, daß die von dem Punkte D auf die beiden Schenkel zu fällenden Linien unter beliebigen Neigungen gezogen werden können. Es läßt ſich auch leicht einſehen, daß verſchiedene Lagen der Linien unter einander möglich ſind.

§. 50.

Aufgabe. Es iſt ein Winkel und auſſerhalb ſeiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man ſoll von dieſem Punkte eine die beiden Schenkel durchſchneidende Linie legen, daß die Entfernung zwiſchen dem gegebenen Punkte und dem einen Schenkel der Zwiſchenlinie zwiſchen beiden Schenkeln gleich ſey. Fig. 63.

Auflöſung. Der Winkel ſey BAC, der Punkt D. Man ziehe durch den Punkt D mit dem ihm zunächſt liegenden Schenkel AB eine Parallele DE und verbinde den Vereinigungspunkt A der beiden Linien durch irgend eine gerade Linie mit einem Punkte E der Linie AD und mache AF = AE, nun ziehe man von dem Punkte F mit der Linie AB eine Parallele FH, welche den Schenkel AC in irgend einem Punkte H trifft und ziehe die Linie DH, ſo ſind die beiden Entfernungen DK und KH einander gleich.

Beweis. Nach der Conſtruction iſt EA = AF, und die Linie ED mit der KA, ebenſo die Linie FH mit KA, alſo auch die Linie ED mit FH parallel, daraus folgt nun die Proportion EA : AF = DK : KH.

Da aber die Linien EA und AF einander gleich sind, so sind auch die Linien DK und KH einander gleich, und die Auflösung thut den Forderungen der Aufgabe Genüge.

Anmerkung. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn der Punkt D innerhalb des durch Verlängerung der Linien BA und CA entstehenden Scheitelwinkels E'AB' liegt, denn alsdann wird von jeder möglichen Linie, die von dem Punkt D aus auf eine von den Linien AB oder AC gezogen wird, nur eine, aber nie beide durchschnitten werden.

Wird verlangt, daß die Entfernung zwischen dem Punkte und der einen Linie, und die zwischen beiden Linien in dem gegebenen Verhältnisse n : m stehen soll, so wird sich die Aufgabe leicht lösen lassen, wenn die Linien EA und AF nach diesem Verhältnisse nach §. 12. bestimmt werden und dann sofort die Construction vollendet wird.

§. 51.

Aufgabe. Es ist ein Winkel und ausserhalb seiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man soll von dem gegebenen Punkte eine Linie auf den einen Schenkel und von dem Durchschnittspunkt beider eine Linie auf den andern Schenkel fällen, daß beide hierdurch entstandene Linien in einem gegebenen Verhältniß stehen und letztere unter einem gegebenen Winkel auf den zweiten Schenkel auffalle. Fig. 64.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC, der Punkt D, das Verhältniß n : m, worin beide Linien zu einander stehen sollen, sey durch die Linien NM und MP ausgedrückt, der Winkel, unter welchem die Linie NM zwischen beiden Schenkeln auffallen soll, sey x. Man verbinde die Spitze A des Winkels BAC mit dem gegebenen Punkt D durch eine gerade Linie, trage auf dem Schenkel AC unter dem gegebenen Winkel x die Linie NM nach §. 46. so an, daß ihr Endpunkt M den Schenkel AB in dem Punkte M treffe und von diesem Punkte M die Linie MP so, daß ihr Endpunkt P in die Linie AD oder ihre Verlängerung falle, ziehe dann mit der Linie PM durch den Punkt D die Linie DE und

durch E mit MN die Linie EF parallel, so sind die Linien DE und DF die gesuchten Linien.

Beweis. Da die Linie DE mit PM und EF mit MN parallel gezogen ist, so sind die Dreiecke ADE und APM, AEF und AMN einander ähnlich, und hieraus ergeben sich folgende Proportionen AE : AM = DE : PM,

und AE : AM = EF : MN,

und hieraus DE : PM = EF : MN,

oder DE : EF = PM : MN.

Demnach stehen die Linien DE und EF in dem gegebenen Verhältnisse wie n : m. Da die Linie MN unter dem Winkel x zwischen AB und AC gelegt wurde und EF mit MN parallel geht, so steht auch die Linie EF unter dem gegebenen Winkel EF auf, demnach entsprechen die Linien DE und EF den gegebenen Bedingungen.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als der senkrechte Abstand der Linie AD von dem Punkte M kleiner, als die Linie MP ist, sie wird unmöglich, wenn dieser größer wird. Die Möglichkeit der Aufgabe hängt daher, wie leicht einzusehen ist, von der schicklichen Zusammensetzung der gegebenen Prämissen ab.

Die Aufgabe vereinfacht sich sehr, wenn überhaupt nur verlangt wird, daß zwei Linien DE und EF gezogen werden sollen, die in einem gegebenen Verhältnisse stehen, ohne daß ein Winkel in die Construction verflochten ist. In die Aufgabe kann auch die Bedingung mit aufgenommen werden, daß die Linie DE unter einem gegebenen Winkel auf AB auffallen soll.

§. 52.

Aufgabe. Es ist ein Winkel und ausserhalb seiner Schenkel ein Punkt gegeben. Man soll von diesem Punkte zwei Linien auf die Schenkel des Winkels so ziehen, daß sie in einem gegebenen Verhältnisse stehen und die eine unter einem bestimmten Winkel auffalle. Fig. 65.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC, der Punkt D, das Verhältniß n : m, worin die beiden Linien stehen sollen, sey nach §. 12. durch die Linien MN und MP ausgedrückt, der bestimmte Winkel, unter dem die eine auffallen

soll, sey x. Man verbinde die Spitze A des Winkels BAC durch eine gerade Linie AD mit dem Punkte D und trage nach §. 46. die Linie NM unter den gegebenen Winkel x so zwischen AD und AC, daß ihre Endpunkte in die beiden Linien fallen; darauf trage man von dem Punkte M aus die zweite Verhältnißlinie MP zwischen AD und AB und ziehe durch den Punkt D mit der Linie MN die Linie DE und mit MP die DF parallel, so sind die beiden Linien DE und DF die gesuchten.

Beweis. Da die Linie DF mit MP und DE mit MN parallel läuft, so entstehen die ähnlichen Dreiecke ADF und AMP, ADE und AMN und hieraus ergeben sich folgende Proportionen

$$AM : AD = MN : DE,$$
$$AM : AD = MP : DF.$$

Ihre Vereinigung führt zu folgender

$$MN : MP = DE : DF.$$

Demnach stehen also die Linien DE und DF in dem gegebenen Verhältnisse n : m. Da ferner der Winkel x dem gegebenen gleich ist und die beiden Linien MN und DE parallel laufen, so ist auch der Winkel DEA dem gegebenen Winkel x gleich und die Linien DF und DE sind so gezogen, daß sie den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Anmerkung. Die Bedingungen für die Möglichkeit der Aufgabe lassen sich leicht aus der Natur der Aufgabe ableiten.

§. 53.

Aufgabe. Es ist ein Winkel gegeben und zwischen seinen Schenkeln ein Punkt. Man soll durch diesen Punkt eine Linie so legen, daß sie von der Spitze des Winkels aus auf beiden Schenkeln gleiche Stücke abschneide. Fig. 66.

Erste Auflösung. Der Winkel sey BAC und der gegebene Punkt D. Man schneide von A aus auf beiden Schenkeln zwei gleiche Stücke AE und AF und verbinde sie durch eine gerade Linie EF und ziehe mit der Linie EF durch den Punkt D eine Linie MN parallel, so werden die durch sie abgeschnittenen Stücke einander gleich seyn.

Zweite Auflösung. Fig. 67. Man ziehe von dem Punkt D auf den ihm zunächst liegenden Schenkel eine senkrechte Linie, welche denselben in F treffe, trage auf den andern Schenkel die Linie AG = AF, und unter dem Winkel DFA die Linie GK = FD. Ziehe durch den Endpunkt K und den Punkt D die gerade Linie MN, so werden die beiden abgeschnittenen Stücke AM und AN einander gleich seyn.

Beweis zur ersten Auflösung. Fig. 66. Die Linie MN ist mit EF parallel gezogen und dadurch sind zwei unter sich ähnliche Dreiecke AEF und AMN entstanden, folglich gilt hier folgende Proportion:

$$AE : AF = AM : AN.$$

Da nun vermöge der Construction die Linien AE und AF einander gleich sind, so sind auch die Linien AM und AN einander gleich. Die Linie MN gehet nun durch den Punkt D und schneidet von beiden Schenkeln gleiche Stücke ab.

Beweis zur zweiten Auflösung. Fig. 67. Vermöge der Construction ist die Linie AF = AG, die Linie GK = DF, der Winkel q = p, und jeder einem rechten gleich; also die beiden Dreiecke AGK und ADF congruent, und die Winkel x und z einander gleich, demnach auch die Linie AK = AD. Hieraus folgt, daß das Dreieck AKD ein gleichschenkliges ist und daß die Winkel an der Grundlinie u und v einander gleich sind. Der Winkel v wird durch den Winkel ADN und u durch AKN zu 180° ergänzt, da aber die Winkel u und v einander gleich sind, so sind auch die Ergänzungswinkel einander gleich, also

$$\sphericalangle AKM = ADN$$

und es ist also in dem Dreiecke AKM die Linie AK, die Winkel x und AKM der Linie AD, den Winkeln z und ADN gleich, also die Dreiecke congruent; folglich die Linie AM = AN. Demnach entspricht also die Linie MN den gegebenen Bedingungen.

§. 54.

Aufgabe. Es sind zwei sehr wenig convergirende, also einen sehr spitzen Winkel bildende, Linien und

auf einer derſelben ein Punkt gegeben, man ſoll auf der andern Linie einen Punkt beſtimmen, der eben ſo weit von dem Vereinigungspunkt der beiden Schenkel liegt, als der gegebene. Fig. 68.

Erörterung. Die gegebenen Linien ſeyen BC und ED, der Punkt auf der einen ſey M, der Vereinigungspunkt der beiden Linien ſey A; ſo iſt leicht zu erſehen, daß der fingirte Punkt A in ſehr weiter Entfernung von M liegen wird, weswegen eine mechaniſche Methode des Gleichmachens oft nicht zureicht.

Auflöſung. Man ziehe in der Linie AB von irgend einer Entfernung von dem Punkt M auſſerhalb der beiden Linien eine Linie HG parallel mit der gegenüber laufenden Linie ED, ſchneide auf der Linie HG ein der Linie HM gleiches Stück ab, und ziehe von dem Durchſchnittspunkte G dieſer Linie durch den Punkt M eine gerade Linie, welche die Linie ED in einem Punkt R trifft, ſo iſt dieſer Punkt der verlangte.

Beweis. Da die Linie HG der Linie HM gleich gemacht wurde, ſo ſind die Winkel x und y an der Grundlinie einander gleich. Der Winkel y iſt als Scheitelwinkel dem Winkel z, und der Winkel x dem Winkel v gleich, da die Linie GR mit ED parallel läuft und x und v alſo innere, durch die durchſchneidende Linie GR erzeugte, Wechſelwinkel ſind. Hieraus folgt, daß die Linie MR ſo gezogen iſt, daß die beiden convergirenden Linien MA und ER hinlänglich verlängert ſich vereinigen und ein gleichſchenkliges Dreieck bilden werden, und daß alſo der Punkt R von ihrem Vereinigungspunkt ſo weit als der Punkt M entfernt liegt.

§. 55.

Aufgabe. Es iſt die Richtung der zwei Schenkel eines Winkels gegeben. Man ſoll zwiſchen beide Schenkel eine Linie ſo legen, daß ſie genugſam verlängert, durch den Vereinigungspunkt der beiden Schenkel gehen wird. Fig. 69.

Auflöſung. Die Linien ſeyen AB und ED. Man ziehe

von irgend einem Punkte F auf einer derſelben, hier AB, eine Linie FG parallel mit der gegenüberſtehenden und ſchneide auf der Linie AB ein der Linie FG gleiches Stück FM ab und ziehe durch die Punkte G und M eine gerade Linie, daß ſie die Linie ED in K durchſchneide, halbire die zwiſchen den beiden Schenkeln des Winkels liegende Linie MP und errichte auf dieſem Punkte P eine ſenkrechte Linie, ſo wird dieſe ſenkrechte Linie P genugſam verlängert, durch den Vereinigungspunkt der beiden Linien gehen.

Beweis. Wenn die Linien BA und DE nach der convergirenden Richtung hin verlängert wurden, ſo werden ſie ſich in einem Punkte N vereinigen und ein gleichſchenkliges Dreieck bilden nach §. 33. Da nun die Linie PQ auf der Mitte der Linie MK ſenkrecht aufſteht, und alſo der Winkel $r = r'$, die Linie MP = PK, und ebenſo der Winkel $x = x'$ gleich iſt, ſo folgt hieraus die Gleichheit der beiden Dreiecke MNP und PNK und hieraus ferner, daß ſich die Linien MA, PQ, KE genugſam verlängert, in einem Punkt durchſchneiden müſſen.

§. 56.

Aufgabe. Es iſt die Richtung der zwei Schenkel eines Winkels und ein Punkt zwiſchen beiden gegeben. Man ſoll durch den gegebenen Punkt eine Linie ſo legen, daß ſie hinlänglich verlängert, durch den Vereinigungspunkt der beiden Linien gehen wird. Fig. 70.

Auflöſung. Die Richtung der Schenkel des Winkels ſey durch die Linien AB und AC angegeben, der gegebene Punkt ſey D. Man lege durch den Punkt D in irgend einer Richtung zwiſchen die beiden Linien die Linie HE, und in einiger Entfernung mit ihr parallel die Linie GF und verbinde die zwei Endpunkte H und F dieſer Linien durch die gerade Linie HF, ziehe von dem Punkte D die Linie DK parallel mit AB, und von dem Punkte K die Linie KM parallel mit der Linie AC und verbinde die Punkte D und M durch eine gerade Linie

DM, so wird diese Linie, genugsam verlängert, durch den Vereinigungspunkt der Linien AB und AC gehen.

Beweis. Da DK mit EF und KM mit HG parallel läuft, so entstehen die ähnlichen Dreiecke HEF und HDK, FHG und FKM. Hieraus fließen folgende Proportionen

$$HD : DE = HK : KF$$

und $$HK : KF = MG : MF.$$

Die Vereinigung beider führt zu folgender

$$HD : DE = MG : MF.$$

Denkt man sich nun die Linien DM, AB und AC bis zu ihrem wirklichen Durchschnittspunkte x verlängert, so werden, da EH und FG parallel laufen, folgende unter sich ähnliche Dreiecke entstehen: EDx und FMx, DHx und MGx, und hieraus würden folgende Proportion fließen

1) $Dx : Mx = DE : FM$,
2) $Dx : Mx = DH : MG$,
3) $Ex : Fx = ED : FM$,
4) $Hx : Gx = DH : MG$.

Da nun die Richtigkeit der vier genannten Proportionen auf der Grundproportion

$$ED : DH = FM : MG$$

beruht, so zeigen die Folgerungen, welche in diesen vier Proportionen aus der Grundproportion gezogen wurden, daß diese nur unter der Bedingung möglich ist, daß die drei Linien AB, DM und AC einen gemeinschaftlichen Vereinigungspunkt haben.

§. 57.

Aufgabe. Es ist die Richtung der zwei Schenkel eines sehr spitzen Winkels und ausserhalb beider ein Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt eine Linie so legen, daß sie, hinlänglich verlängert, durch den Vereinigungspunkt der beiden Linien gehen wird. Fig. 71.

Auflösung. Die zwei Schenkel seyen AB und AC. Der gegebene Punkt D. Man ziehe von D in irgend einer Richtung die Linie DE auf den entgegengesetzten Schen-

kel AB und in einiger Entfernung mit ED die Linie FG parallel, verbinde den Punkt D mit F durch die gerade Linie DF und ziehe mit AB durch den Punkt H die Linie HK parallel; verbinde den Punkt K mit G durch die Linie KG und ziehe von dem Punkte D eine Parallele DM mit KG, so wird die Linie DM, genug verlängert, den Vereinigungspunkt der Linien AB und AC treffen.

Beweis. Verlängert man die Linie FG, bis sie die Linie DM in dem Punkt M trifft, so führt sich der Beweis auf eine ähnliche Art, wie der im vorigen §. Man gewinnt folgende Proportion

$$EH : DH = FG : GM,$$

und hieraus fließen, wenn man sich die Linien AB, AC, DM bis zu ihrem Vereinigungspunkt verlängert denkt, folgende Proportionen:

$$EH : FG = Hx : Gx,$$
$$EH : FG = Ex : Fx,$$
$$HD : GM = Hx : Gx,$$
$$HD : GM = Dx : Mx;$$

also ist auch die Richtigkeit obiger Construction bewiesen.

§. 58.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ein Winkel gegeben. Man soll über der Linie den Winkel so antragen, daß er mit seinen Schenkeln auf den Endpunkten der Linie aufstehe.

Erörterung. Die gegebene Linie sey ED, der Winkel ABC, so ist zu bemerken, daß der Winkel, welcher nach der Bedingung der Aufgabe über der Linie construirt werden soll, kleiner, als zwei Rechte seyn muß. Ist er zweien Rechten gleich, so bilden seine Schenkel selbst eine gerade Linie und dann ist die Aufgabe unmöglich. Ist er kleiner, so wird die Aufgabe möglich; ist er größer als zwei Rechte, so wird er ein hohler Winkel, und der Winkel fällt dann ausserhalb der, auf der Linie aufstehenden Schenkel, und seine Construction widerspricht den Forderungen der Aufgabe.

Für die Auflösung der Aufgabe ergeben sich nun drei Fälle:

1) wenn der gegebene Winkel ein spitzer,
2) wenn er ein stumpfer,
3) wenn er ein rechter Winkel ist.

1te Auflösung. Fig. 72. Der Winkel BAC ist spitz. Man verdopple den gegebenen Winkel durch Anreihen oder nach §. 40., wodurch der Winkel EPD entsteht, verbinde nach §. 45. die gegebene Linie ED so mit den Schenkeln des doppelten Winkels EPD, daß ihre Endpunkte von beiden Schenkeln gleiche Stücke EP und PD abschneiden, lege nun den gefundenen Schenkelabschnitt ED = PM von der Spitze P aus in irgend einer Richtung, aber so, daß der Punkt M über die Linie ED falle, und verbinde den Punkt M mit den beiden Endpunkten der Linie ED durch gerade Linien, so ist der Winkel EMD der gesuchte.

2te Auflösung. Fig. 74. Der Winkel BAC ist stumpf. Man verdopple den gegebenen Winkel nach §. 40., wodurch der hohle Winkel EPD entsteht, trage nach §. 45. die gegebene Linie ED so zwischen seine Schenkel, daß sie mit ihren Endpunkten in dieselben falle und gleiche Stücke auf beiden abschneide, lege in irgend einer Richtung eine Linie PM, welche einem der Schenkelabschnitte gleich ist, von der Spitze P aus, so zwischen die beiden Linien PE und PD, daß ihr anderer Endpunkt M auf die entgegengesetzte Seite von P fällt, und verbinde den Punkt M mit den Endpunkten E und D der Linie ED durch die Linien EM und DM, so ist der Winkel EMD der gesuchte.

3te Auflösung. Fig. 75. Der Winkel BAC ist ein Rechter. Man halbire die Linie ED und bemerke ihren Mittelpunkt P, lege von dem Mittelpunkte P aus nach irgend einer Richtung über der Linie ED die Linie $PM = \frac{ED}{2}$ und verbinde den Endpunkt M mit denen der Linie ED durch gerade Linien, so ist der Winkel EMD der gesuchte rechte Winkel.

Beweis zur ersten Auflösung. Man verlängere die Linie MP durch die Spitze P, wodurch die Linie MK entsteht. Vermöge der Construction ist der Winkel EPD doppelt

so

ſo groß, als der gegebene Winkel BAC, und die Linien EP, DP, MP einander gleich. Aus der Gleichheit dieſer Linien folgt, daß die Dreiecke EMP und DMP gleichſchenklig, und die Winkel an ihren Grundlinien r und r', q und q' einander gleich ſind. Da der äuſſere Winkel an einem Dreiecke den beiden innern entgegengeſetzten gleich iſt, ſo iſt

$$x = q + q', \text{ und } y = r + r'.$$

Da man nun r ſtatt r' und q ſtatt q' ſetzen kann, ſo erhält man durch Zuſammenzählen beider Winkel

$$x + y = 2q + 2r = 2(q + r)$$

Nun bilden die Winkel x und y zuſammen den Winkel EPD: die Winkel r und q den Winkel EMD, alſo iſt

$$EPD = x + y = 2(q + r) = 2\,EMD.$$

Da nun der Winkel EPD doppelt ſo groß iſt, als der gegebene Winkel BAC, ſo iſt

$$EPD = 2\,BAC = 2\,EMD$$

und hieraus ergibt ſich

$$\frac{EPD}{2} = BAC = EMD.$$

Es iſt alſo der Winkel EMD dem Winkel BAC gleich, und ſteht mit den Endpunkten ſeiner Schenkel auf den Endpunkten der Linie ED auf, und entſpricht demnach den Forderungen der Aufgabe.

Beweis zur zweiten Auflöſung. Man verlängere die Linie MP nach K, ſo wird durch ſie der erhabene Winkel EPD in die Winkel v und z zerlegt. Durch die unter ſich gleichen Linien EP, MP und DP entſtehen die gleichſchenkligen Dreiecke EMP und MDP, in welchen die Winkel an der Grundlinie x und x', y und y' einander gleich ſind. Dieß führt zu folgenden Gleichungen

$$v = y + y' = 2y,$$
$$z = x + x' = 2x,$$

und die Vereinigung beider zu folgender

$$z + v = 2y + 2x = 2(y + x).$$

Da nun der erhabene Winkel EPD den beiden Winkeln z und v gleich und doppelt ſo groß, als der Winkel BAC iſt, ſo führt dieß zu folgender Gleichung

$$EPD = z + v = 2(x + y) = 2\,BAC,$$
$$\text{und} \quad 2(y + x) = 2\,EMD,$$
$$\text{also ist} \quad EPD = 2\,EMD = 2\,BAC,$$
$$\text{oder} \quad EMD = BAC;$$

d. h. der Winkel EMD steht mit den Endpunkten seiner Schenkel auf deren Linie ED auf und ist dem Winkel BAC gleich.

Beweis zur dritten Auflösung. Auf gleiche Art, wie vorhin, wird bewiesen, daß

$$q + r = 2(x + y).$$

Nun sind die beiden Winkel q und r zwei Winkel über einer geraden Linie, betragen also zwei Rechte und sind zugleich doppelt so groß, als die zwei Winkel x und y. Die Winkel x und y aber sind dem Winkel EMD gleich. Demnach ist der Winkel EMD ein rechter und steht mit den Endpunkten seiner Schenkel auf denen der Linie ED auf, und entspricht also den Forderungen der Aufgabe.

Anmerkung. Man sieht leicht, daß es unzählig viele Fälle gibt, welche die Forderungen der oben aufgestellten Aufgabe befriedigen, denn jeder Winkel über der gegebenen Linie ED, dessen Spitze mit dem Endpunkte M der, von P aus nach irgend einer Richtung hin angelegten, Linie PM zusammen fällt und dessen Schenkel auf den Endpunkten E und D der gegebenen Linie ED aufstehen, genügt der Aufgabe. Da nun über der Linie ED von P aus mit der Linie PM unzählig viele Punkte gewählt werden können, so sind auch unzählig viele, unter einander und dem gegebenen gleiche, Winkel möglich. Hiebei ist zu merken, daß, wenn der gegebene Winkel ein spitzer ist, die Spitze des Winkels immer auf der nämlichen Seite liegen muß, wo der Durchschnittspunkt P der Schenkelabschnitte liegt; wenn er ein stumpfer ist, auf der entgegengesetzten Seite. Ist der gegebene aber ein rechter, so kann er auf beiden Seiten der gegebenen Linie liegen. Man überzeugt sich endlich eben so leicht, daß die gegebene Aufgabe noch immer gelöst ist, wenn von dem Punkte P aus mit dem gegebenen Schenkelabschnitte PM über der gegebenen Linie ED eine Kreislinie EMD gezogen wird, und in ihr irgend ein Punkt M willkührlich gewählt wird.

Hieran schließt sich nun noch folgende Bemerkung: Die gegebene Aufgabe ist für den spitzen und stumpfen Winkel möglich, wenn der Punkt M über die gegebene Linie ED und nicht in oder unter dieselbe fällt; sie wird unmöglich, sobald der Punkt M in die Linie ED oder unter sie fällt. Bei dem rechten Winkel ist sie immer möglich, der Punkt mag über oder unter die Linie ED fallen, sie wird unmöglich, wenn er in dieselbe fällt.

§. 59.

Aufgabe. Es ist eine Linie, ein Winkel und ein Schenkel dieses Winkels gegeben. Man soll den gegebenen Winkel über der Linie so antragen, daß der Winkel den gegebenen Schenkel enthalte und mit seinen Schenkeln auf den Endpunkten der gegebenen Linie aufstehe. Fig. 72. 74. 75.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC, die Linie, auf deren Endpunkten der zu construirende Winkel aufstehen soll, ED, und der eine Schenkel EM. Man verfahre auf eine von den, im vorigen Hen angegebenen, Methoden, wie wenn über der Linie ED ein Winkel von unbestimmter Schenkellänge construirt werden sollte, lege dann den gegebenen Schenkel EM an dem einen Endpunkte der Linie ED und MP an P so an, daß sie sich in einem Punkte M vereinigen, oder beschreibe mit diesen Linien zwei sich durchschneidende Kreisbögen und ziehe von M auf den entgegengesetzten Endpunkt der Linie ED eine gerade Linie, so wird der Winkel EMD dem gegebenen gleich seyn und die Linie EM als einen Schenkel haben.

Der Beweis führt sich nach dem im vorigen Hen Gesagten leicht.

Anmerkung. Es läßt sich leicht erkennen, daß die Linie AB, welche als Schenkel des gegebenen Winkels vorkommen soll, in ihrer Größe bestimmten Grenzen unterliegt, je nachdem der Winkel, der über der Linie liegen soll, 1) ein rechter, 2) ein stumpfer, 3) ein spitzer ist.

1) Da die relative Größe der beiden Schenkel eines Winkels, der über der Linie ED construirt werden soll, nach Fig. 72. 74. 75. von dem Vereinigungspunkt der Linie PM und des gegebenen Schenkels AB abhängt, so ergibt sich hieraus, daß ein Winkel unter diesen Bedingungen nur dann noch möglich ist, wenn die Linie PM unter irgend einem Winkel, der auch noch so klein seyn kann, angetragen wird, aber dann unmöglich wird, wenn die Linie PM auf die Linie ED auffällt. Hieraus folgt: Bei einem rechten Winkel ist die Aufgabe möglich, wenn die Linie AB kleiner als die gegebene Linie ED, worüber der Winkel construirt werden soll.

2) Bei der Construction des rechten Winkels über einer geraden Linie fällt der Punkt P in die Linie ED selbst, bei der Con-

ſtruction eines ſtumpfen Winkels über ihr fällt derſelbe unter die Linie ED. Das Größenverhältniß der beiden Schenkel des zu conſtruirenden Winkels hängt von dem Vereinigungspunkt der gegebenen Linie EM und der Linie PM ab. Da nun die Conſtruction des, über der Linie aufzutragenden, Winkels nur dann möglich iſt, wenn der Punkt nicht in oder unter die Linie ED fällt, ſo ergibt ſich hieraus, daß die Conſtruction dieſes Winkels ſo lange möglich wird, als der eine Schenkel des zu conſtruirenden Winkels kleiner, als die gegebene Linie ED iſt.

3) Bei der Conſtruction des ſpitzen Winkels wird ſich die Größe der Linie BA anders beſtimmen. Der Punkt P fällt bei der Conſtruction dieſes Winkels über die Linie ſelbſt, und ebenſo die Spitze des zu conſtruirenden Winkels. Da nun das Größenverhältniß der beiden Schenkel des zu conſtruirenden Winkels von dem Vereinigungspunkt der gegebenen Linie EM und der Linie PM abhängt, ſo wird dieſe möglich ſeyn, ſo lange der Punkt M nicht in die gerade Linie ED fällt. Hieraus fließt alſo, daß die Linie EM größer ſeyn muß, als die Linie ED. Uebrigens unterliegt die Annahme ihrer Größe keineswegs der Willkühr, die Gränze ihrer Größe gibt ſich durch folgende Gleichung:

$$EM = \sqrt{\left[\frac{BE^2}{4} + (NP + PM)^2\right]}$$

wo NP die von P aus auf den Mittelpunkt der Linie ED gelöſet ſenkrechte Linie bedeutet. Die Erörterung dieſer Gleichung wird ſich aus den Lehren des zweiten Kapitels leicht deuten laſſen.

2te Anmerkung. Die Aufgabe iſt noch immer gelöst, wenn über der Linie ED ein Kreisbogen gezogen und von einem ihrer Endpunkte E oder D die gegebene Linie EM ſo angetragen wird, daß ihr entgegengeſetzter Endpunkt in den Kreisbogen EMD fällt und dann der Winkel ſelbſt vollendet wird. Hiebei iſt von ſelbſt einleuchtend, daß, wenn die Linie EM = DM′ an den Endpunkt D geſetzt und das Dreieck EM′D vollendet wird, die Dreiecke EMD und EM′D congruent, die Winkel bei M und M′ und die beiden correſpondirenden Schenkel EM und M′D, EM′ und MD gleich ſind, obgleich die beiden anliegenden Schenkel EM und MD, EM′ und M′D unter ſich ungleich ſind. Dieſe zwei, der Lage nach verſchiedenen aber congruenten, Dreiecke ſind ſo lange möglich, als die den Winkel bei M oder M′ einſchließenden Schenkel ungleich ſind; und werden immer entſtehen, wenn die beiden einſchließenden Schenkel ungleich ſind; ſind dieſe aber gleich, ſo iſt nur ein Winkel möglich. In allen den genannten Fällen iſt auch nur eine Auflöſung möglich und ſomit die Aufgabe beſtimmt.

Ganz anders verhält es ſich aber, wenn Fig. 73. der in dem Kreisbogen EMD, einzutragende Schenkel EM größer, als die

Linie ED ist. Alsdann werden durch die Linie EM zwei Durchschnittspunkte M und M' in der Peripherie, also auch zwei Winkel EMD und EM'D möglich seyn, welche beide der Aufgabe genügen, während die Linie ED, die Winkel bei M und M' und die Linien EM und EM' sich immer gleich, aber MD und M'D, die Winkel bei D und E verschieden sind. Die Auflösung wird dann bestimmt seyn, wenn bemerkt ist, ob unter den Winkeln bei E und D ein stumpfer vorkommen soll, oder ob beide spitz seyn sollen. Es ist einleuchtend, daß die in den Kreisbogen einzutragende Linie EM nicht größer, als der Diameter des Kreises seyn darf, wozu der Kreisbogen EM, M'D gehört, weil sonst das Eintragen dieser Linie in den Kreisbogen und also auch die Aufgabe unmöglich wäre.

Hieraus ergeben sich also folgende Bemerkungen über die vorliegende Aufgabe: die Aufgabe ist bestimmt, wenn der einzutragende Schenkel kleiner, als die Linie ist, worauf der Winkel aufstehen soll.

Die Aufgabe ist unbestimmt, wenn der einzutragende Schenkel größer ist, als die genannte Linie. Sie wird aber bestimmt, wenn neben dem einzutragenden Winkel, auch die Beschaffenheit der beiden an der Linie ED anliegenden Winkel angegeben ist. Die vorstehenden Bestimmungen gelten nur, wenn der einzutragende Winkel bei M ein spitzer ist, denn in dem Falle, wo er ein rechter oder ein stumpfer wird, ist die Aufgabe bestimmt.

§. 60.

Aufgabe. *Es ist ein Winkel und eine Linie gegeben, man soll die Linie so zwischen die beiden Schenkel des Winkels eintragen, daß ihre Endpunkte in dieselben fallen, und sie mit einer durch die beiden Endpunkten gelegten geraden Linie parallel laufe.* Fig. 76.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC, die gegebene Linie sey ED. Man ziehe durch die Spitze A des gegebenen Winkels eine Linie mit den beiden Endpunkten C und B des gegebenen Winkels parallel und trage von A aus auf sie die gegebene Linie ED = AF, ziehe mit dem gegenüber liegenden Schenkel AB von F eine parallele Linie, bis sie den zunächst liegenden Schenkel in irgend einem Punkte G schneidet; ziehe von diesem Punkte eine den Schenkel AB

in dem Punkte H treffende Linie parallel mit AF, so ist die Linie HG die verlangte.

Beweis. Da die Linie AF mit HG und FG mit AH nach der Construction parallel gezogen ist, so sind die Winkel x und x', y und y' als Wechselwinkel zwischen Parallel-Linien einander gleich. Die Linie GF erzeugt zwei Dreiecke AGF und AGH und ist beiden gemeinschaftlich. Da nun eine Linie und die beiden anliegenden Winkel die Congruenz zweier Dreiecke bedingen, so sind die genannten zwei Dreiecke einander congruent, also die Linie HG der Linie AF und zugleich der Linie ED gleich. Da nun HG mit AF und diese mit BC parallel geht, so geht auch die Linie HG mit den Endpunkten der beiden Schenkeln parallel, und thut also den Forderungen der Aufgabe Genüge.

§. 61.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine Linie so legen, daß die Summe zweier von den Endpunkten der gegebenen Linie gefällten Perpendikel der gegebenen Linie selbst gleich sey. Fig. 77.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, der Punkt ausserhalb derselben D. Man halbire die gegebene Linie AB und bemerke ihren Halbirungspunkt C, verbinde denselben mit dem gegebenen Punkte D durch die Linie DC und halbire auch diese in E. Nun beschreibe man von C mit der Hälfte der Linie AB und von E mit der Hälfte von DC zwei sich durchschneidende Kreisbögen, ziehe durch ihren Durchschnittspunkt P und den gegebenen D eine unbestimmte gerade Linie und fälle auf sie von den Endpunkten der Linie AB zwei senkrechte Linien AF und BG, so sind dieß die gesuchten Linien.

Beweis. Die Linie FG ist nach der Construction durch den Punkt D gezogen. Da die Linien DE und AE halbirt und mit ihren Hälften zwei sich in P durchschneidende Kreisbögen gezogen wurden, so bildet der Winkel, dessen Spitze in

diesen Durchschnittspunkt P fällt, und dessen Schenkel auf den Endpunkten einer der Linien aufstehen, nach §. 58, 3. einen rechten Winkel. Demnach ist also der Winkel DPC ein rechter Winkel, und die Linie CP steht auf der Linie DP senkrecht auf. Alle Linien, die auf der Linie DP oder ihrer Verlängerung senkrecht aufstehen, laufen, wie bekannt, miteinander parallel. Demnach laufen also die Linien GB und AF mit PC parallel.

Die Linie AC ist der Linie CB und der Linie PC gleich, vermöge der Construction; nun halbirt die Linie PC eine zwischen zweien Parallel-Linien liegende Nebenseite und geht mit den Parallel-Linien GB und EA selbst parallel, also ist sie der Hälfte der Summe der beiden Parallel-Linien FA und GB gleich §. 18. Sie ist ferner auch der Hälfte von AB gleich; dieß führt zu dem Schluß: daß die Summe der Linien GB und FA der Linie AB gleich ist.

Aus dem Gesagten folgt nun, daß die Linie FG durch den Punkt D so gezogen wurde, daß zwei, von den Endpunkten der gegebenen Linie AB auf FG gefällte senkrechte Linien, der Summe der gegebenen Linie AB gleich kommen.

Anmerkung. Die Möglichkeit der Aufgabe hängt, wie sich aus dem beobachteten Verfahren ergibt, davon ab, daß sich mit den Hälften der Linien DC und AB von den beiden Mittelpunkten E und C dieser Linien zwei sich durchschneidende Kreisbögen beschreiben lassen. Dieß ist dann nicht mehr möglich, wenn EC kleiner ist, als die Hälfte von AC, oder wenn die Entfernung des gegebenen Punktes D von dem Mittelpunkte der Linie AB kleiner ist, als die Hälfte dieser Linie. Sie ist möglich, wenn die Entfernung des gegebenen Punktes eben so groß oder größer, als die Hälfte derselben ist.

Im Falle, daß die Hälfte der gegebenen Linie und die Entfernung des gegebenen Punktes von ihrem Mittelpunkte einander gleich seyn sollten, wird die Aufgabe dadurch gelöset, daß der Mittelpunkt der gegebenen Linie und der gegebene Punkt durch eine gerade Linie mit einander verbunden werden und in dem Punkt D eine Linie senkrecht aufgesetzt wird, wodurch so fort die Richtung der zu suchenden Linie angegeben ist.

§. 62.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben. Man soll durch den gegebe-

nen Punkt eine Linie dergeſtalt legen, daß die Summe der von den beiden Endpunkten der gegebenen Linie auf ſie gefällten ſenkrechten Linien zwei Drittheile von der gegebenen Linie betrage. Fig. 78.

Auflöſung. Die gegebene Linie ſey AB, der gegebene Punkt D. Man theile die gegebene Linie nach §. 11. in drei gleiche Theile, halbire ſie und bemerke ihren Mittelpunkt C. Nun verbinde man den gegebenen Punkt D mit dem Mittelpunkt C der gegebenen Linie durch eine gerade Linie DC und halbire ſie, bemerke ihren Mittelpunkt E, beſchreibe dann von dem Mittelpunkte E der Linie mit der Hälfte von DC und von dem Mittelpunkt C der Linie AB mit dem dritten Theile der Linie AB zwei ſich durchſchneidende Kreisbögen, und ziehe durch ihren Durchſchnittspunkt P und den gegebenen D die gerade unbeſtimmte Linie DFG, fälle von den Endpunkten der Linie AB die ſenkrechten Linien AF und BG auf die eben gezogene Linie, ſo beträgt ihre Summe $\frac{2}{3}$ AB.

Beweis. Ueber der Linie DC iſt jeder Winkel, deſſen Spitze mit dem Endpunkte des Radius zuſammen fällt, nach §. 58, 3. ein Rechter; demnach iſt der Winkel DPC ein Rechter und hat einen Schenkel in der Richtung nach dem Punkte D liegen, den andern im Mittelpunkte C der Linie AB aufſtehen, welcher dem dritten Theile von der Linie AB gleich kommt. Beide Linien ſtehen ſenkrecht aufeinander. Alle Linien, die auf der Linie DP oder ihrer Verlängerung ſenkrecht aufſtehen, gehen mit PC parallel, alſo ſind die Linien AF, PC, GB unter ſich parallel. Die Linie PC ſtehet auf der Mitte einer zwiſchen zwei Parallelen liegenden Seitenlinie und gehet mit ihnen parallel, alſo beträgt ſie die Hälfte der Summe dieſer Parallelen AF und GB. Die Linie PC iſt nach der Conſtruction dem dritten Theile von AB, oder der Hälfte von zwei Drittheilen der AB gleich. Hieraus folgt, daß die Linie FG ſo durch den Punkt D gezogen iſt, daß zwei von den Endpunkten der Linie AB auf FG gefällte ſenkrechte Linien $\frac{2}{3}$ von der gegebenen Linie betragen.

Anmerkung. Iſt eine Linie, und auſſerhalb derſelben ein Punkt gegeben, und ſoll man durch den gegebenen Punkt eine Linie dergeſtalt legen, daß die Summe der, von den beiden Endpunkten der gegebenen Linie auf ſie gefällten ſenkrechten, Linien das m fache, oder den $\frac{n}{m}$ten Theil der gegebenen Linie betrage, ſo laſſen ſich die allgemeinen Fälle leicht nach dem ſo eben angegebenen Verfahren behandeln.

Eben ſo laſſen ſich leicht aus der angegebenen Conſtruction die Bedingungen für die Möglichkeit der Aufgabe entnehmen.

§. 63.

Aufgabe. Es ſind drei Punkte ihrer Lage nach gegeben. Man ſoll einen vierten ſo beſtimmen, daß die von ihm auf die gegebenen Punkte gezogenen Linien beſtimmte Winkel bilden. Fig. 79.

Auflöſung. Die drei Punkte ſeyen A, B und C, der geſuchte Punkt D, der Winkel ADB, der mit den Punkten A und B gebildet werden ſoll, ſey x, der Winkel BDC, der über den Punkten B und C gebildet werden ſoll, y. Man verbinde die Punkte A und B, B und C durch die geraden Linien AB und BC, beſchreibe nach §. 58. vermittelſt einer Kreislinie FDG über der Linie AB einen Winkel, der dem gegebenen Winkel x gleich iſt, und ebenſo, vermittelſt einer Kreislinie HDK, über der Linie BC einen Winkel, welcher dem Winkel y gleich iſt, ziehe von dem Durchſchnittspunkte D der beiden Kreislinien auf die gegebenen Punkte A, B und C die Linien DA, DB, DC, ſo iſt die Aufgabe gelöſet.

Beweis. Vermöge der Conſtruction iſt jeder Winkel über der Linie AD, deſſen Spitze in einem Punkte des Bogens FDG liegt, dem Winkel x gleich, ebenſo jeder über der Linie BC, deſſen Spitze in dem Bogen HDK liegt, dem Winkel y gleich. Hieraus folgt alſo, daß der Winkel ADB über der Linie AB dem Winkel x, und der Winkel BDC über der Linie BC dem Winkel y gleich iſt, und daß alſo D der Punkt iſt, der durch die gerade Linie DA, DB, DC die gegebenen Winkel erzeugt.

§. 64.

Aufgabe. Es ſind drei Punkte gegeben. Man ſoll einen vierten ſo beſtimmen, daß er von jedem der gegebenen gleich weit abſteht. Fig. 80.

Auflöſung. Die gegebenen Punkte ſeyen A, B und C. Man verbinde die Punkte A und B durch die gerade Linie AB und B und C durch die gerade Linie BC, halbire beide Linien und errichte in dem Mittelpunkte beider, E und F, zwei ſenkrechte Linien, die ſich genugſam verlängert, in einem Punkte D ſchneiden werden, ſo iſt ihr Durchſchnittspunkt D der geſuchte Punkt.

Beweis. Man ziehe die Linien AD, DB und DC. Vermöge der Conſtruction iſt die Linie AE = EB, die Linie ED ſtehet ſenkrecht in dem Mittelpunkte E auf. Es iſt alſo der Winkel r = r', alſo ſind die beiden Dreiecke AED und DEB, folglich auch die Linien AD und DB einander gleich. Auf gleiche Art wird bewieſen, daß die Linie DB der Linie DC gleich iſt. Hieraus folgt, daß die drei Linien DA, DB, DC einander gleich ſind und daß alſo der Punkt D von allen drei Punkten gleichweit entfernt liegt.

§. 65.

Aufgabe. Es iſt eine Linie und auſſer ihr ſind zwei Punkte gegeben. Man ſoll in der Linie einen Punkt beſtimmen, welcher mit der gegebenen Linie und mit beiden Punkten zwei gleiche Winkel bilde. Fig. 81.

Auflöſung. Die gegebene Linie ſey AB und die Punkte C und E. Man verbinde die beiden Punkte durch eine gerade Linie mit einander und trage von dem Punkte C die Linie CE ſo auf AB an, daß ſie die Linie AB in einem Punkte F ſchneide, verbinde dann die Punkte F und E durch eine gerade Linie FE mit einander, halbire dieſe Linie und ziehe von dem Punkte E durch ihren Mittelpunkt eine Linie, welche die Linie AB in einem Punkte D treffen wird, ſo iſt dieſer Punkt der geſuchte und der Winkel FDC dem Winkel CDE gleich.

Beweis. Man ziehe die Linie DE. Vermöge der Construction sind die Linien CF und CE, FM und ME einander, und die Linie CM sich selbst gleich. Drei Seiten bestimmen ein Dreieck. Demnach sind die Dreiecke CFM und CME einander gleich, und die Winkel CMF und CME rechte Winkel. Ebenso sind die Winkel FMD und DME als Ergänzungs-Winkel Rechte. Da nun FM = ME, MD = MD und der Winkel r = r′ ist, so sind auch die beiden Dreiecke FDM und DME, also auch die Winkel x und y, weil sie gleichen Seiten gegenüber stehen, einander gleich. Demnach hat der auf die oben angegebene Art gefundene Punkt D die Eigenschaft, daß er mit der Linie DA und den Punkten C und E gleiche Winkel bildet.

Anmerkung. Sind mit der Linie CF = CE zwei Durchschnitte möglich, so gibt es auch zwei Auflösungen.

§. 66.

Aufgabe. Von drei Linien, welche in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, ist die Summe der beiden äussern und die Summe der einen äussern und mittlern gegeben. Man soll die Linien finden. Fig. 82.

Auflösung. Es sey die Linie AC die Summe der beiden äussern und AB die Summe der einen äussern und mittlern. Man errichte auf dem einen Endpunkte A der Linie AC die Linie AB senkrecht und trage an dem andern Endpunkte B der Linie AB unter einem halben rechten Winkel die unbestimmte Linie BD an, halbire die Linie AC und beschreibe über ihr mit dem Halbmesser MA den Kreisbogen ADC, welcher die Linie BD in einem Punkt D treffen wird, fälle von dem Punkte D eine senkrechte Linie DE auf AC, so sind die drei Linien

AE, ED, EC

die gesuchten, und ED ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen AE und EC.

Beweis. Man verlängere die Linie DE bis F so, daß DF = BA werde und ziehe die Hülfslinien AF, so sind, da die Linien AB und DE senkrecht auf AC stehen, die beiden Linien AB und DF einander gleich und parallel. Die beiden Linien BD und AF sind zwischen zwei gleichen und parallelen

Linien eingeschlossen, also sind sie auch einander gleich und parallel. Die Winkel $x + r + x'$ sind zwei rechten gleich, $x = \frac{R}{2}$, $r = R$, also ist der Winkel x' der Hälfte eines Rechten gleich. Hieraus folgt, daß das Dreieck AEF, da der Winkel x ein rechter ist, ein rechtwinkliges gleichschenkliges ist und daß also die Linie AE und EF einander gleich sind. Da nun $DE + EF = DF = AB$ ist, so ist auch

$$AE + ED = AB.$$

Nun bilden die Linien AE, ED, EC, da AE + EC der Diameter und ED die auf ihm senkrecht stehende halbe Sehne ist, folgende Proportion:

$$AE : ED = ED : EC.$$

Hieraus folgt also, daß die zwei Linien AC und AB so zerlegt sind, daß die Summe der beiden äussern Glieder der einen, die Summe der einen äussern und innern der andern gleich ist.

Anmerkung. Es läßt sich leicht aus der Fig. 8a. entnehmen, daß die Größe der beiden Summen-Linien AB und AC nicht willkührlich angenommen werden kann, sondern daß ihre Größe in bestimmte Gränzen eingeschlossen ist, und daß sie in bestimmten Fällen unmöglich wird, dieß ist der Fall, wenn die Linie BD, welche unter einem halben rechten Winkel in B auf AB angetragen wurde, die Peripherie ADC weder durchschneidet, noch berührt.

§. 67.

Aufgabe. Von drei Linien, welche in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, ist die mittlere und der Unterschied zwischen den beiden äussern gegeben. Man soll die beiden äussern finden. Fig. 83.

Auflösung. Der Unterschied zwischen den beiden äussern sey AB, die mittlere Proportional-Linie sey BC. Man errichte auf dem einen Endpunkte B der Unterschiedslinie AB die Linie BC, halbire die Linie AB, verbinde den Mittelpunkt M der Linie AB mit dem Endpunkte C der Linie BC durch die Linie MC; trage von M aus die Linie MC auf die Linien

MB und MA auf, wodurch ME und MF und der Kreisbogen FCE entsteht, so sind die Linien BE und BE die gesuchten äussern Proportional-Linien.

Beweis. Vermöge der Construction ist die Linie ME = MF = MC; ebenso AM = MB. Wird nun MB von ME, und AM von FM abgezogen, so entstehen die Linien BE und AF, die einander gleich sind, da gleiche Größen von gleichen abgezogen wurden. Wird nun zu dem gegebenen Unterschied AB die Linie AF gesetzt, so entsteht die Linie FB, welche um den gegebenen Unterschied AB größer als BE ist. Nun ist ferner von dem Mittelpunkte M der Linie FE der Kreisbogen FCE durch den Endpunkt der Linie BC gezogen, also ist FE ein Diameter und BC die halbe auf FE senkrecht aufstehende Sehne. Hieraus folgt nun folgende Proportion:

$$FB : BC = BC : BE,$$

und es sind also mittelst obiger Construction, zu der mittleren Proportionale und dem Unterschiede der beiden äussern, die beiden äussern Linien selbst gefunden.

§. 68.

Aufgabe. Von drei Linien, welche in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, ist die eine äussere und die Summe der mittleren und andern äussern gegeben. Man soll die mittlere und andere äussere finden. Fig. 84.

Auflösung. Die gegebene äussere sey AB und die Summe der mittleren und andern äussern sey BC. Man ziehe zwischen beiden Linien die mittlere geometrische Proportional-Linie BF §. 17., halbire die Linie AB, und ziehe von ihrem Mittelpunkte G an den Endpunkt F der Linie BF die Linie GF, und schneide die Linie GH = GF auf GC ab, so ist BH die mittlere und HC die andere äussere Proportional-Linie.

Beweis. Vermöge der Construction sind die Linien GF und GH, also auch ihre Quadrate GF^2 und GH^2, einander gleich. Zerlegt man nun die Linie GH in die Theile GB und BH und nimmt dann von beiden Linien das Quadrat, so ist

$$GF^2 = (GB + BH)^2,$$

ſtruction eines ſtumpfen Winkels über ihr fällt derſelbe unter die Linie ED. Das Größenverhältniß der beiden Schenkel des zu conſtruirenden Winkels hängt von dem Vereinigungspunkt der gegebenen Linie EM und der Linie PM ab. Da nun die Conſtruction des, über der Linie aufzutragenden, Winkels nur dann möglich iſt, wenn der Punkt nicht in oder unter die Linie ED fällt, ſo ergibt ſich hieraus, daß die Conſtruction dieſes Winkels ſo lange möglich wird, als der eine Schenkel des zu conſtruirenden Winkels kleiner, als die gegebene Linie ED iſt.

3) Bei der Conſtruction des ſpitzen Winkels wird ſich die Größe der Linie BA anders beſtimmen. Der Punkt P fällt bei der Conſtruction dieſes Winkels über die Linie ſelbſt, und ebenſo die Spitze des zu conſtruirenden Winkels. Da nun das Größenverhältniß der beiden Schenkel des zu conſtruirenden Winkels von dem Vereinigungspunkt der gegebenen Linie EM und der Linie PM abhängt, ſo wird dieſe möglich ſeyn, ſo lange der Punkt M nicht in die gerade Linie ED fällt. Hieraus fließt alſo, daß die Linie EM größer ſeyn muß, als die Linie ED. Uebrigens unterliegt die Annahme ihrer Größe keineswegs der Willkühr, die Gränze ihrer Größe gibt ſich durch folgende Gleichung:

$$EM = \sqrt{\left[\frac{BE^2}{4} + (NP + PM)^2\right]}$$

wo NP die von P aus auf den Mittelpunkt der Linie ED gelöſet ſenkrechte Linie bedeutet. Die Erörterung dieſer Gleichung wird ſich aus den Lehren des zweiten Kapitels leicht deuten laſſen.

2te Anmerkung. Die Aufgabe iſt noch immer gelöst, wenn über der Linie ED ein Kreisbogen gezogen und von einem ihrer Endpunkte E oder D die gegebene Linie EM ſo angetragen wird, daß ihr entgegengeſetzter Endpunkt in den Kreisbogen EMD fällt und dann der Winkel ſelbſt vollendet wird. Hiebei iſt von ſelbſt einleuchtend, daß, wenn die Linie EM = DM′ an den Endpunkt D geſetzt und das Dreieck EM′D vollendet wird, die Dreiecke EMD und EM′D congruent, die Winkel bei M und M′ und die beiden correſpondirenden Schenkel EM und M′D, EM′ und MD gleich ſind, obgleich die beiden anliegenden Schenkel EM und MD, EM′ und M′D unter ſich ungleich ſind. Dieſe zwei, der Lage nach verſchiedenen aber congruenten, Dreiecke ſind ſo lange möglich, als die den Winkel bei M oder M′ einſchließenden Schenkel ungleich ſind; und werden immer entſtehen, wenn die beiden einſchließenden Schenkel ungleich ſind; ſind dieſe aber gleich, ſo iſt nur ein Winkel möglich. In allen den genannten Fällen iſt auch nur eine Auflöſung möglich und ſomit die Aufgabe beſtimmt.

Ganz anders verhält es ſich aber, wenn Fig. 73. der in dem Kreisbogen EMD, einzutragende Schenkel EM größer, als die

Linie ED ist. Alsdann werden durch die Linie EM zwei Durchschnittspunkte M und M' in der Peripherie, also auch zwei Winkel EMD und EM'D möglich seyn, welche beide der Aufgabe genügen, während die Linie ED, die Winkel bei M und M' und die Linien EM und EM' sich immer gleich, aber MD und M'D, die Winkel bei D und E verschieden sind. Die Auflösung wird dann bestimmt seyn, wenn bemerkt ist, ob unter den Winkeln bei E und D ein stumpfer vorkommen soll, oder ob beide spitz seyn sollen. Es ist einleuchtend, daß die in den Kreisbogen einzutragende Linie EM nicht größer, als der Diameter des Kreises seyn darf, wozu der Kreisbogen EM, M'D gehört, weil sonst das Eintragen dieser Linie in den Kreisbogen und also auch die Aufgabe unmöglich wäre.

Hieraus ergeben sich also folgende Bemerkungen über die vorliegende Aufgabe: die Aufgabe ist bestimmt, wenn der einzutragende Schenkel kleiner, als die Linie ist, worauf der Winkel aufstehen soll.

Die Aufgabe ist unbestimmt, wenn der einzutragende Schenkel größer ist, als die genannte Linie. Sie wird aber bestimmt, wenn neben dem einzutragenden Winkel, auch die Beschaffenheit der beiden an der Linie ED anliegenden Winkel angegeben ist. Die vorstehenden Bestimmungen gelten nur, wenn der einzutragende Winkel bei M ein spitzer ist, denn in dem Falle, wo er ein rechter oder ein stumpfer wird, ist die Aufgabe bestimmt.

§. 60.

Aufgabe. Es ist ein Winkel und eine Linie gegeben, man soll die Linie so zwischen die beiden Schenkel des Winkels eintragen, daß ihre Endpunkte in dieselben fallen, und sie mit einer durch die beiden Endpunkten gelegten geraden Linie parallel laufe. Fig. 76.

Auflösung. Der gegebene Winkel sey BAC, die gegebene Linie sey ED. Man ziehe durch die Spitze A des gegebenen Winkels eine Linie mit den beiden Endpunkten C und B des gegebenen Winkels parallel und trage von A aus auf sie die gegebene Linie ED = AF, ziehe mit dem gegenüber liegenden Schenkel AB von F eine parallele Linie, bis sie den zunächst liegenden Schenkel in irgend einem Punkte G schneidet; ziehe von diesem Punkte eine den Schenkel AB

in dem Punkte H treffende Linie parallel mit AF, so ist die Linie HG die verlangte.

Beweis. Da die Linie AF mit HG und FG mit AH nach der Construction parallel gezogen ist, so sind die Winkel x und x', y und y' als Wechselwinkel zwischen Parallel-Linien einander gleich. Die Linie GF erzeugt zwei Dreiecke AGF und AGH und ist beiden gemeinschaftlich. Da nun eine Linie und die beiden anliegenden Winkel die Congruenz zweier Dreiecke bedingen, so sind die genannten zwei Dreiecke einander congruent, also die Linie HG der Linie AF und zugleich der Linie ED gleich. Da nun HG mit AF und diese mit BC parallel geht, so geht auch die Linie HG mit den Endpunkten der beiden Schenkeln parallel, und thut also den Forderungen der Aufgabe Genüge.

§. 61.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben. Man soll durch den gegebenen Punkt eine Linie so legen, daß die Summe zweier von den Endpunkten der gegebenen Linie gefällten Perpendikel der gegebenen Linie selbst gleich sey. Fig. 77.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB, der Punkt ausserhalb derselben D. Man halbire die gegebene Linie AB und bemerke ihren Halbirungspunkt C, verbinde denselben mit dem gegebenen Punkte D durch die Linie DC und halbire auch diese in E. Nun beschreibe man von C mit der Hälfte der Linie AB und von E mit der Hälfte von DC zwei sich durchschneidende Kreisbögen, ziehe durch ihren Durchschnittspunkt P und den gegebenen D eine unbestimmte gerade Linie und fälle auf sie von den Endpunkten der Linie AB zwei senkrechte Linien AF und BG, so sind dieß die gesuchten Linien.

Beweis. Die Linie FG ist nach der Construction durch den Punkt D gezogen. Da die Linien DE und AE halbirt und mit ihren Hälften zwei sich in P durchschneidende Kreisbögen gezogen wurden, so bildet der Winkel, dessen Spitze in

dieſen Durchſchnittspunkt P fällt, und deſſen Schenkel auf den Endpunkten einer der Linien aufſtehen, nach §. 58, 3. einen rechten Winkel. Demnach iſt alſo der Winkel DPC ein rechter Winkel, und die Linie CP ſteht auf der Linie DP ſenkrecht auf. Alle Linien, die auf der Linie DP oder ihrer Verlängerung ſenkrecht aufſtehen, laufen, wie bekannt, miteinander parallel. Demnach laufen alſo die Linien GB und AF mit PC parallel.

Die Linie AC iſt der Linie CB und der Linie PC gleich, vermöge der Conſtruction; nun halbirt die Linie PC eine zwiſchen zweien Parallel-Linien liegende Nebenſeite und geht mit den Parallel-Linien GB und EA ſelbſt parallel, alſo iſt ſie der Hälfte der Summe der beiden Parallel-Linien FA und GB gleich §. 18. Sie iſt ferner auch der Hälfte von AB gleich; dieß führt zu dem Schluß: daß die Summe der Linien GB und FA der Linie AB gleich iſt.

Aus dem Geſagten folgt nun, daß die Linie FG durch den Punkt D ſo gezogen wurde, daß zwei, von den Endpunkten der gegebenen Linie AB auf FG gefällte ſenkrechte Linien, der Summe der gegebenen Linie AB gleich kommen.

Anmerkung. Die Möglichkeit der Aufgabe hängt, wie ſich aus dem beobachteten Verfahren ergibt, davon ab, daß ſich mit den Hälften der Linien DC und AB von den beiden Mittelpunkten E und C dieſer Linien zwei ſich durchſchneidende Kreisbögen beſchreiben laſſen. Dieß iſt dann nicht mehr möglich, wenn EC kleiner iſt, als die Hälfte von AC, oder wenn die Entfernung des gegebenen Punktes D von dem Mittelpunkte der Linie AB kleiner iſt, als die Hälfte dieſer Linie. Sie iſt möglich, wenn die Entfernung des gegebenen Punktes eben ſo groß oder größer, als die Hälfte derſelben iſt.

Im Falle, daß die Hälfte der gegebenen Linie und die Entfernung des gegebenen Punktes von ihrem Mittelpunkte einander gleich ſeyn ſollten, wird die Aufgabe dadurch gelöſet, daß der Mittelpunkt der gegebenen Linie und der gegebene Punkt durch eine gerade Linie mit einander verbunden werden und in dem Punkt D eine Linie ſenkrecht aufgeſetzt wird, wodurch ſo fort die Richtung der zu ſuchenden Linie angegeben iſt.

§. 62.

Aufgabe. Es iſt eine Linie und auſſerhalb derſelben ein Punkt gegeben. Man ſoll durch den gegebe-

Die Vereinigung von 3 und 4 führt zu folgender Gleichung:

$$AF \cdot FB = AB \cdot BC,$$

und hieraus ergibt sich die Proportion

$$AB : AF = BF : BC$$

Die Addition der Verhältniß-Glieder erzeugt folgende

$$AB + AF : BF + BC = AB : BF,$$

da nun $AB + AF = BF$, so erhält man durch Einführung dieses Werthes und Umstellung der Glieder der vorliegenden Proportion $AB : BF = BF : FC$.

In dieser Proportion erscheint die Linie BF als die innere, FC als die äussere größere; sie selbst aber sind um den gegebenen Unterschied BC von einander verschieden. Die angegebene Construction löset also die Aufgabe.

2) Die gegebene äussere AB sey die größere, und BC sey der Unterschied zwischen der mittleren und kleineren äussern. Fig. 86.

Auflösung. Auf der Linie AB schneide man BC ab, und suche zu AC und CB die mittlere geometrische Proportional-Linie CD, verbinde den Endpunkt D der Proportionale CD und B der Linie CB durch die gerade Linie BD, halbire die Linie AB und beschreibe über ihrer Hälfte den Halbkreis EFB und trage in diesen die Linie BD so ein, daß ihr Endpunkt in F die Peripherie treffe; verbinde diesen Punkt F mit dem Mittelpunkte E durch die Linie EF, hierauf ziehe man von dem Punkte E mit EF den Kreisbogen GFg, der die Linie AB in G und g schneidet, so ist BG die mittlere und CG die äussere, oder Bg die mittlere und gC die äussere Proportional-Linie.

Beweis. Man ziehe die Linie AD, so ist das Dreieck ADB ein rechtwinkliges. Vermöge der Construction ist $BF = BD$ und $BG = Ag$. Die Linie BF steht auf dem Endpunkte der Linie EF senkrecht auf und bildet also zu dem Kreise GFg eine Tangente. Da nun das Quadrat der Tangente dem Producte aus der Sekante und der, zwischen der Kreislinie und der Tangente liegenden Linie gleich kommt, so ist

$$FB^2 = GB \cdot Bg.$$

Wird

Anmerkung. Iſt eine Linie, und auſſerhalb derſelben ein Punkt gegeben, und ſoll man durch den gegebenen Punkt eine Linie dergeſtalt legen, daß die Summe der, von den beiden Endpunkten der gegebenen Linie auf ſie gefällten ſenkrechten, Linien das m fache, oder den $\frac{n}{m}$ten Theil des gegebenen Linie betrage, ſo laſſen ſich die allgemeinen Fälle leicht nach dem ſo eben angegebenen Verfahren behandeln.

Eben ſo laſſen ſich leicht aus der angegebenen Conſtruction die Bedingungen für die Möglichkeit der Aufgabe entnehmen.

§. 63.

Aufgabe. Es ſind drei Punkte ihrer Lage nach gegeben. Man ſoll einen vierten ſo beſtimmen, daß die von ihm auf die gegebenen Punkte gezogenen Linien beſtimmte Winkel bilden. Fig. 79.

Auflöſung. Die drei Punkte ſeyen A, B und C, der geſuchte Punkt D, der Winkel ADB, der mit den Punkten A und B gebildet werden ſoll, ſey x, der Winkel BDC, der über den Punkten B und C gebildet werden ſoll, y. Man verbinde die Punkte A und B, B und C durch die geraden Linien AB und BC, beſchreibe nach §. 58. vermittelſt einer Kreislinie FDG über der Linie AB einen Winkel, der dem gegebenen Winkel x gleich iſt, und ebenſo, vermittelſt einer Kreislinie HDK, über der Linie BC einen Winkel, welcher dem Winkel y gleich iſt, ziehe von dem Durchſchnittspunkte D der beiden Kreislinien auf die gegebenen Punkte A, B und C die Linien DA, DB, DC, ſo iſt die Aufgabe gelöſet.

Beweis. Vermöge der Conſtruction iſt jeder Winkel über der Linie AD, deſſen Spitze in einem Punkte des Bogens FDG liegt, dem Winkel x gleich, ebenſo jeder über der Linie BC, deſſen Spitze in dem Bogen HDK liegt, dem Winkel y gleich. Hieraus folgt alſo, daß der Winkel ADB über der Linie AB dem Winkel x, und der Winkel BDC über der Linie BC dem Winkel y gleich iſt, und daß alſo D der Punkt iſt, der durch die gerade Linie DA, DB, DC die gegebenen Winkel erzeugt.

§. 64.

Aufgabe. Es sind drei Punkte gegeben. Man soll einen vierten so bestimmen, daß er von jedem der gegebenen gleich weit absteht. Fig. 80.

Auflösung. Die gegebenen Punkte seyen A, B und C. Man verbinde die Punkte A und B durch die gerade Linie AB und B und C durch die gerade Linie BC, halbire beide Linien und errichte in dem Mittelpunkte beider, E und F, zwei senkrechte Linien, die sich genugsam verlängert, in einem Punkte D schneiden werden, so ist ihr Durchschnittspunkt D der gesuchte Punkt.

Beweis. Man ziehe die Linien AD, DB und DC. Vermöge der Construction ist die Linie AE = EB, die Linie ED stehet senkrecht in dem Mittelpunkte E auf. Es ist also der Winkel r = r', also sind die beiden Dreiecke AED und DEB, folglich auch die Linien AD und DB einander gleich. Auf gleiche Art wird bewiesen, daß die Linie DB der Linie DC gleich ist. Hieraus folgt, daß die drei Linien DA, DB, DC einander gleich sind und daß also der Punkt D von allen drei Punkten gleichweit entfernt liegt.

§. 65.

Aufgabe. Es ist eine Linie und ausser ihr sind zwei Punkte gegeben. Man soll in der Linie einen Punkt bestimmen, welcher mit der gegebenen Linie und mit beiden Punkten zwei gleiche Winkel bilde. Fig. 81.

Auflösung. Die gegebene Linie sey AB und die Punkte C und E. Man verbinde die beiden Punkte durch eine gerade Linie mit einander und trage von dem Punkte C die Linie CE so auf AB an, daß sie die Linie AB in einem Punkte F schneide, verbinde dann die Punkte F und E durch eine gerade Linie FE mit einander, halbire diese Linie und ziehe von dem Punkte E durch ihren Mittelpunkt eine Linie, welche die Linie AB in einem Punkte D treffen wird, so ist dieser Punkt der gesuchte und der Winkel FDC dem Winkel CDE gleich.

Beweis. Man ziehe die Linie DE. Vermöge der Construction sind die Linien CF und CE, FM und ME einander, und die Linie CM sich selbst gleich. Drei Seiten bestimmen ein Dreieck. Demnach sind die Dreiecke CFM und CME einander gleich, und die Winkel CMF und CME rechte Winkel. Ebenso sind die Winkel FMD und DME als Ergänzungs-Winkel Rechte. Da nun FM = ME, MD = MD und der Winkel r = r′ ist, so sind auch die beiden Dreiecke FDM und DME, also auch die Winkel x und y, weil sie gleichen Seiten gegenüber stehen, einander gleich. Demnach hat der auf die oben angegebene Art gefundene Punkt D die Eigenschaft, daß er mit der Linie DA und den Punkten C und E gleiche Winkel bildet.

Anmerkung. Sind mit der Linie CF = CE zwei Durchschnitte möglich, so gibt es auch zwei Auflösungen.

§. 66.

Aufgabe. Von drei Linien, welche in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, ist die Summe der beiden äussern und die Summe der einen äussern und mittlern gegeben. Man soll die Linien finden. Fig. 82.

Auflösung. Es sey die Linie AC die Summe der beiden äussern und AB die Summe der einen äussern und mittlern. Man errichte auf dem einen Endpunkte A der Linie AC die Linie AB senkrecht und trage an dem andern Endpunkte B der Linie AB unter einem halben rechten Winkel die unbestimmte Linie BD an, halbire die Linie AC und beschreibe über ihr mit dem Halbmesser MA den Kreisbogen ADC, welcher die Linie BD in einem Punkt D treffen wird, fälle von dem Punkte D eine senkrechte Linie DE auf AC, so sind die drei Linien

AE, ED, EC

die gesuchten, und ED ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen AE und EC.

Beweis. Man verlängere die Linie DE bis F so, daß DF = BA werde und ziehe die Hülfslinien AF, so sind, da die Linien AB und DE senkrecht auf AC stehen, die beiden Linien AB und DF einander gleich und parallel. Die beiden Linien BD und AF sind zwischen zwei gleichen und parallelen

Linien eingeschlossen, also sind sie auch einander gleich und parallel. Die Winkel $x + r + x'$ sind zwei rechten gleich, $x = \frac{R}{2}$, $r = R$, also ist der Winkel x' der Hälfte eines Rechten gleich. Hieraus folgt, daß das Dreieck AEF, da der Winkel x ein rechter ist, ein rechtwinkliges gleichschenkliges ist und daß also die Linie AE und EF einander gleich sind. Da nun $DE + EF = DF = AB$ ist, so ist auch

$$AE + ED = AB.$$

Nun bilden die Linien AE, ED, EC, da $AE + EC$ der Diameter und ED die auf ihm senkrecht stehende halbe Sehne ist, folgende Proportion:

$$AE : ED = ED : EC.$$

Hieraus folgt also, daß die zwei Linien AC und AB so zerlegt sind, daß die Summe der beiden äussern Glieder der einen, die Summe der einen äussern und innern der andern gleich ist.

Anmerkung. Es läßt sich leicht aus der Fig. 8a. entnehmen, daß die Größe der beiden Summen-Linien AB und AC nicht willkührlich angenommen werden kann, sondern daß ihre Größe in bestimmte Gränzen eingeschlossen ist, und daß sie in bestimmten Fällen unmöglich wird, dieß ist der Fall, wenn die Linie BD, welche unter einem halben rechten Winkel in B auf AB angetragen wurde, die Peripherie ADC weder durchschneidet, noch berührt.

§. 67.

Aufgabe. Von drei Linien, welche in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, ist die mittlere und der Unterschied zwischen den beiden äussern gegeben. Man soll die beiden äussern finden. Fig. 83.

Auflösung. Der Unterschied zwischen den beiden äussern sey AB, die mittlere Proportional-Linie sey BC. Man errichte auf dem einen Endpunkte B der Unterschiedslinie AB die Linie BC, halbire die Linie AB, verbinde den Mittelpunkt M der Linie AB mit dem Endpunkte C der Linie BC durch die Linie MC; trage von M aus die Linie MC auf die Linien

MB und MA auf, wodurch ME und MF und der Kreisbogen FCE entſteht, ſo ſind die Linien BE und BE die geſuchten äuſſern Proportional-Linien.

Beweis. Vermöge der Conſtruction iſt die Linie ME = MF = MC; ebenſo AM = MB. Wird nun MB von ME, und AM von FM abgezogen, ſo entſtehen die Linien BE und AF, die einander gleich ſind, da gleiche Gröſſen von gleichen abgezogen wurden. Wird nun zu dem gegebenen Unterſchied AB die Linie AF geſetzt, ſo entſteht die Linie FB, welche um den gegebenen Unterſchied AB gröſſer als BE iſt. Nun iſt ferner von dem Mittelpunkte M der Linie FE der Kreisbogen FCE durch den Endpunkt der Linie BC gezogen, alſo iſt FE ein Diameter und BC die halbe auf FE ſenkrecht aufſtehende Sehne. Hieraus folgt nun folgende Proportion:

$$FB : BC = BC : BE,$$

und es ſind alſo mittelſt obiger Conſtruction, zu der mittleren Proportionale und dem Unterſchiede der beiden äuſſern, die beiden äuſſern Linien ſelbſt gefunden.

§. 68.

Aufgabe. Von drei Linien, welche in einer ſtetigen geometriſchen Proportion ſtehen, iſt die eine äuſſere und die Summe der mittleren und andern äuſſern gegeben. Man ſoll die mittlere und andere äuſſere finden. Fig. 84.

Auflöſung. Die gegebene äuſſere ſey AB und die Summe der mittleren und andern äuſſern ſey BC. Man ziehe zwiſchen beiden Linien die mittlere geometriſche Proportional-Linie BF §. 17., halbire die Linie AB, und ziehe von ihrem Mittelpunkte G an den Endpunkt F der Linie BF die Linie GF, und ſchneide die Linie GH = GF auf GC ab, ſo iſt BH die mittlere und HC die andere äuſſere Proportional-Linie.

Beweis. Vermöge der Conſtruction ſind die Linien GF und GH, alſo auch ihre Quadrate GF^2 und GH^2, einander gleich. Zerlegt man nun die Linie GH in die Theile GB und BH und nimmt dann von beiden Linien das Quadrat, ſo iſt

$$GF^2 = (GB + BH)^2,$$

oder wenn das Quadrat auf der rechten Seite entwickelt wird:

$$GF^2 = GB^2 + BH^2 + 2\,GB \,.\, BH;$$

da aber die Linie AB in G halbirt ist, so ist

$$AB = 2\,GB.$$

Wird nun dieser Werth in obige Gleichung eingeführt, so entsteht

$$1)\ GF^2 = GB^2 + BH^2 + AB \,.\, BH$$

da die Linie BF auf GB senkrecht aufsteht, so ist das Dreieck GFB ein rechtwinkliges, und hieraus fließt, nach dem pythagoraischen Lehrsatze, folgende Gleichung

$$2)\ GF^2 = GB^2 + BF^2.$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in Nro. 1 und 2 sind einander gleich und bilden daher folgende Gleichung

$$GB^2 + BH^2 + AB \,.\, BH = GB^2 + BF^2,$$

oder da sich die gleichen Ausdrücke GB^2 zerstören,

$$BH^2 + AB \,.\, BH = BF^2;$$

BF^2 ist die mittlere Proportionale zwischen AB und BC, also

$$BF^2 = AB \,.\, BC$$

Dieß führt zu folgender Gleichung

$$BH \,.\, BH + AB \,.\, BH = AB \,.\, BC$$

oder

$$BH\,(BH + AB) = AB \,.\, BC;$$

da nun die Linie $BH + AB = AH$ ist, so entsteht

$$BH \,.\, AH = AB \,.\, BC,$$

und hieraus folgende Proportion

$$AH : BC = AB : BH.$$

Da sich nun der Unterschied der homologen Glieder zu einander, wie das dritte und vierte Glied verhält, so entsteht

$$AH - AB : AB = BC - BH : BH.$$

Nun ist die Linie $AH - AB = BH$, $BC - HC = HC$. Werden diese Linien in die so eben gefundene Proportion gesetzt, so entsteht

$$BH : AB = HC : BH.$$

Durch Umstellung der Glieder ergibt sich

$$AB : BH = BH : HC$$

und in dieser Proportion bildet die Linie BC die Summe der mittleren und zweiten äussern Proportionale. Demnach ist also durch obige Construction die Aufgabe gelöst.

§. 69.

Aufgabe. Von drei Linien, welche in einer ſtetigen geometriſchen Proportion ſtehen, iſt die eine äuſſere, und der Unterſchied zwiſchen der mittleren und andern äuſſern gegeben. Man ſoll die beiden letztern darſtellen.

1) Die gegebene äuſſere AB ſey die kleinere und BC ſey der Unterſchied zwiſchen der mittleren und der gröſſeren äuſſern.

Auflöſung. Fig. 85. Man ſuche zwiſchen AB und BC die mittlere geometriſche Proportionale BD, halbire die Linie AB und verbinde ihren Mittelpunkt E mit dem Endpunkte D der mittleren Proportional-Linie BD durch die Linie ED, und trage die Linie ED = EF auf die verlängerte Linie EA, ſo iſt die Linie FB die mittlere und FC die gröſſere äuſſere Proportional-Linie.

Beweis. Vermöge der Conſtruction iſt ED = EF, alſo auch $ED^2 = EF^2$. Wird EF in ſeine Beſtandtheile EA + AF zerlegt, ſo entſteht hieraus:

$$ED^2 = (EA + AF)^2 = EA^2 + AF^2 + 2\,EA \,.\, AF.$$

Da nun AE = EB iſt, ſo iſt auch 2 EA = AE + EB = AB. Wird dieſer Werth in obige Gleichung eingeführt, ſo entſteht

$$ED^2 = EA^2 + AF^2 + AB \,.\, AF$$
$$= EA^2 + AF\,(AF + AB)$$

und hieraus fließt, da AF + AB = FB iſt:

$$1)\quad ED^2 = EA^2 + AF \,.\, FB,$$

die Linie BD ſteht ſenkrecht auf EB, alſo iſt das Dreieck EBD rechtwinklig. Nach dem pythagoraiſchen Lehrſatze gilt alſo folgende Gleichung:

$$2)\quad ED^2 = EB^2 + DB^2.$$

Aus der Vereinigung der Gleichungen 1 und 2 aber fließt folgende $EA^2 + AF \,.\, FB = EB^2 + DB^2$.

Da aber $EB^2 = EA^2$ iſt, ſo geht dieſe Gleichung, wenn die gleichen Ausdrücke abgezogen werden, in folgende über

$$3)\quad AF \,.\, FB = DB^2.$$

Nun iſt ferner nach der Conſtruction:

$$4)\quad DB^2 = AB \,.\, BC.$$

Wird hierin DB statt FB gesetzt, so entsteht

1) $DB^2 = GB \cdot Bg$.

Da das Dreieck ADB ein rechtwinkliges ist, so gilt zwischen der einen Kathete, dem ihr anliegenden Abschnitte auf der Hypotenuse und der Hypotenuse folgende Gleichung

2) $DB^2 = AB \cdot BC$.

Aus der Verbindung der Gleichungen 1 und 2 ergibt sich folgende $GB \cdot Bg = AB \cdot BC$,

und hieraus fließt folgende Proportion

3) $AB : Bg = BG : BC$;

der Unterschied der beiden ersten und der beiden letzten Glieder führt zu folgender Proportion:

$AB : BG = AB - Bg : BG = BG$.

Da nun $AB - Bg = Ag = BG$

und $BG = BC = GC$ ist, so erhält man durch Einführung der angegebenen Werthe

$AB : BG = BG : GC$.

BG ist die mittlere und GC die äussere Proportional-Linie, beide aber sind um die gegebene Linie CB von einander verschieden.

Wird in die Proportion 3 die, der BG gleiche, Linie Ag gesetzt, so entsteht $AB : Ag = Bg : BC$

und es führt der Unterschied der beiden ersten und beiden letzten Glieder zu folgender Proportion

$AB : Bg = AB - Ag : Bg - BC$.

Da nun $AB = Ag = Bg$ und $Bg - BC = Cg$ ist, so geht die vorliegende Proportion in folgende über:

$AB : Bg = Bg : Cg$.

Bg ist die mittlere und Cg die äussere Proportional-Linie, beide haben die Linie BC zum Unterschiede und thun also der Aufgabe ein Genüge.

§. 70.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zweier Linien und das Verhältniß, worin sie zu einander stehen, gegeben. Man soll die beiden Linien finden. Fig. 87.

Erſte Auflöſung. Der Unterſchied der beiden Linien ſey GK; das Verhältniß m : n, worin beide Linien ſtehen, ſey durch die Linien ab und bc angegeben. Man ſetze die Linien ab und bc in gerader Linie aneinander und ſchneide von a aus die Linie aG = bc ab, ziehe von den Punkten b und c die Linien bB und cC unter irgend einer Neigung gegen die Linie ac, aber unter ſich parallel; trage an den Punkt G die Linie GK ſo an, daß ihr Endpunkt K in die Linie bB falle, und ziehe mit der Linie GK durch den Endpunkt a die Linie aC parallel, ſo ſind die Linien aB und BC die geſuchten Linien.

Beweis. Man ziehe die Linie GF parallel mit KB, ſo bilden die Linien GF und BK, GK und FB, als unter ſich parallel laufend, ein Parallelogramm, und folglich iſt die Linie GK = FB. Da die Linie bB mit cC parallel gezogen iſt, ſo entſtehen die beiden ähnlichen Dreiecke abB und acC und hieraus fließt folgende Proportion:

$$ab : bc = aB : BC,$$

oder $aG + Gb : bc = AF + FB : BC.$

Ebenſo verhält ſich

$$aG : bc = AF : BC.$$

Da endlich nach der Conſtruction aG = bc iſt, ſo iſt auch aF = BC. Nun iſt die Linie FB dem gegebenen Unterſchied GK gleich; alſo iſt die Linie aB um den gegebenen Unterſchied größer, als die Linie BC, und ſteht zu der Linie BC in dem gegebenen Verhältniß. Folglich entſpricht die gegebene Auflöſung den Forderungen der Aufgabe.

Zweite Auflöſung. Fig. 88. Man trage an den Endpunkt a einer, zur größeren willkührlich geneigten Linie aG den gegebenen Unterſchied FB = aF, und an den entgegengeſetzten Punkt b von ba die Linie bc; verbinde den Endpunkt F mit dem Trennungspunkte der beiden Linien c durch die Linie cF und ziehe durch b mit der Linie cF die Linie bG parallel, ſo ſind die Linien aG und FG die geſuchten.

Beweis. Vermöge der Conſtruction iſt das Dreieck acF dem Dreieck abG ähnlich; dieß führt zu folgender Proportion:

$$ac : ab = aF : aG.$$

Wird der Unterschied der beiden ersten und letzten genommen, so ergibt sich daraus folgende:

$$ab - ac : ab = aG - aF : aG.$$

Da nun $ab - ac = bc$ und $aG - aF = FG$ ist, so geht die vorliegende Proportion, wenn diese Werthe eingeführt werden, in folgende über:

$$bc : ab = FG : aG.$$

Dieser Proportion zufolge stehen die gefundenen Linien FG und aG in dem gegebenen Verhältniß, und die Linie AF ist um den gegebenen Unterschied größer, als die Linie FG; demnach ist durch diese Construction obige Aufgabe gelöst.

§. 71.

Aufgabe. Es sind zwei Parallel-Linien und zwischen beiden ein Punkt gegeben. Man soll durch diesen Punkt zwischen beide Parallel-Linien eine Linie so legen, daß der Abstand des Punktes von der einen Parallele um eine bestimmte Linie grösser sey, als der von der andern Parallele.

Auflösung. Fig. 89. Die Parallel-Linien seyen AB und AC; der zwischen ihnen liegende Punkt sey F; der Unterschied, der zwischen beiden Abständen statt finden soll, sey DE.

Man ziehe durch den Punkt F zwischen beide Parallel-Linien in irgend einer Richtung die Linie ab, so wird diese Linie durch den Punkt F in zwei Linien aF und Fb getheilt. Nun suche man nach dem vorhergehenden §. zwei Linien, welche in dem Verhältnisse wie aF : Fb stehen und die Linie DE zum Unterschied haben, setze sie in gerader Richtung an einander, wodurch die Linie gh entsteht, lege irgend wo diese Linie gh so zwischen die Parallel-Linien, daß ihre Endpunkte auf letztere fallen, und ziehe durch den Punkt F mit der Linie gh eine Parallele GH, so wird die Linie FH um DE größer seyn, als die Linie FG.

Beweis. Vermöge der Construction ist die Linie GH = gh, denn GH und gh sind zwei Parallel-Linien, welche zwi-

schen den Parallelen AC und AB liegen. Der ganze Beweis beruht daher darauf, zu zeigen, daß die, durch den Punkt F mit der ihr gleichen Linie gh parallel gelegte, Linie GH durch den Punkt F selbst in die zwei gesuchten Theile getheilt wird. Dieß ergibt sich daraus, daß alle Linien, welche sich in einem gemeinschaftlichen Punkt zwischen zwei Parallel-Linien durchschneiden, nach dem nämlichen Verhältnisse getheilt werden. Die Linie gh ist nach der Construction in das Verhältniß aF : Fb so getheilt worden, daß beide Theile um die Linie DE von einander verschieden sind. Wird nun diese, oder die ihr gleiche Linie GH durch den Punkt F zwischen die gegebenen Parallel-Linien gelegt, so wird sie durch F so in zwei Theile getheilt, daß der eine um DE größer ist, als der andere.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist so lange möglich, als die gegebene Linie DE gleich oder größer ist, als der Unterschied, welchen die zwei senkrechte Abstände des Punktes F von den beiden Parallelen AB und AC bilden; sie wird unmöglich, wenn die gegebene Linie DE kleiner, als dieser Unterschied wird, denn die nach dem vorhergehenden §. gesuchte Linie gh würde kleiner, als der senkrechte Abstand beider Parallelen AC und AB von einander.

Zusatz. Die Behauptung, daß alle Linien, welche einen, zwischen zwei Parallel-Linien liegenden, Punkt durchschneiden, nach einerlei Verhältniß getheilt werden, rechtfertigt sich leicht. Es seyen Fig. 90. durch den, zwischen den Parallel-Linien GA und ag liegenden, Punkt F die Linien aA, bB, cC, dD, eE, gG gezogen, so bilden immer zwei zunächst liegende Linien durch ihre Verlängerung zwei ähnliche Dreiecke, wie dieß aus den beiden Dreiecken GFE und eFg erhellt, worin der Winkel x = x', z = z', und y = y' ist. Es erzeugt daher der Punkt D mit jedem Linien-Paare, die sich in ihm durchkreuzen, vier Abschnitte, die in gleichem Verhältnisse stehen, und hieraus fließen folgende Proportionen:

GF : Fg = EF : Fe = DF : Fd = CF : Fc . . . . . .

woraus die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung erhellt.

§. 72.

Aufgabe. Von drei Linien, welche in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, kennt man die Summen, welche die mittlere Proportionale mit

den beiden äussern bildet. Man soll die Linien finden. Fig. 91.

Auflösung. Die mittlere Proportionale heißt b, die eine äussere a, die andere c. Gegeben ist die Linie AB = a + b, und BC = b + c. Man setze die beiden Linien AB und BC in gerader Linie AC aneinander, und trage von dem Endpunkte A unter irgend einem Winkel die eine der gegebenen Linien AB = AD, von dem Punkte C auf der Verlängerung der Linie AC die andere AB = CE an; verbinde die Punkte D und C durch eine gerade Linie mit einander, und ziehe durch den Punkt E mit der Linie DC eine Parallele, welche die Linie AD in dem Punkte F trifft, so ist die Linie DF die mittlere geometrische Proportionale. Ist diese gefunden, so ergibt sich die Linie a, wenn man DF von AB, und die Linie c, wenn man DF von BC abzieht.

Beweis. Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt folgende Gleichung a : b = b : c.
In einer geometrischen Proportion verhält sich die Summe der beiden ersten Glieder zur Summe der beiden letzten, wie das erste zum dritten. Hieraus fließt

$$a + b : b + c = a : b,$$

oder wenn man a + b = AB, b + c = BC setzt, und die Proportion umkehrt

$$BC : AB = b : a.$$

Wird der obige Satz wiederum angewendet, so entsteht

$$AB + BC : a + b = BC : b$$

oder, da AB = a + b ist,

$$AB + BC : AB = BC : b.$$

Da nun AC = AB + BC ist, so geht die Proportion in folgende über AC : AB = BC : b.
Die angegebene Auflösung entspricht der hier gefundenen Proportion.

§. 73.

Aufgabe. Von drei Linien, welche in einer stetigen geometrischen Proportion stehen, ist der Unterschied zwischen der größern und mittlern Propor-

tionale, und zwischen der mittlern Proportionale und der kleineren gegeben. Man soll die drei Linien finden. Fig. 92.

Auflösung. Die größere Linie heiße a, die mittlere Proportionale b, die kleinere c. Gegeben ist die Linie AB als Unterschied zwischen a und b, und die Linie AC als Unterschied zwischen b und c. Man nehme den Unterschied zwischen beiden Unterschieden AB — AC = AD, und trage an den einen Endpunkt A der Linie AD unter irgend einem Winkel die eine Linie AB, und an den andern D in gerader Richtung die andere Linie AC = DE an, verbinde die beiden Punkte D und B durch die gerade Linie DB und ziehe durch den Punkt E eine Linie EF mit DB parallel, so, daß sie die gegenüber liegende Linie in dem Punkt F durchschneide, so ist die Linie BF die mittlere geometrische Proportional-Linie. Zählt man die Linie AB zu ihr, so findet man die größere Linie a, zieht man AC von ihr ab, die kleinere Linie c.

Beweis. Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt folgende Proportion a : b = b : c.
In einer geometrischen Proportion verhält sich, wie bekannt, der Unterschied des ersten und zweiten Gliedes zu dem des dritten und vierten, wie die homologen Glieder, ist also

$$a - b : b - c = a : b,$$

oder wenn man AB statt a — b und AC statt b — c setzt,

$$AB : AC = a : b.$$

Wendet man den eben angewendeten Satz wiederum an, so entsteht $AB - AC : a - b = AC : b.$
Wird hierin AD statt AB — AC und AB statt a — b gesetzt so entsteht $AD : AB = AC : b,$
und diese Proportion fällt mit obiger Auflösung zusammen.

Zweites Kapitel.

Geometrische Construction algebraischer Formeln.

Diese Gleichung verlangt: Es soll eine Linie gefunden werden, deren Quadrat der Summe der Quadrate der Linien a und b und dem doppelten Rechteck aus der einen Linie und einer dritten d gleich ist. Das stumpfwinklige Dreieck setzt uns in den Stand diese Aufgabe zu lösen.

Construction. Fig. 101. Man setze die gegebene Linie d = BD, die Linie a = AB, die Linie b = BC. An dem Endpunkte D der Linie BD, errichte man eine unbestimmte senkrechte Linie, trage von ihrem andern Endpunkte B die Linie b = BC so an, daß sie erstere in dem Punkte C schneide, verlängere die Linie BD um die Linie AB, welche mit d das Rechteck erzeugt, und ziehe die Linie AC, so ist AC die gesuchte Linie und es ist also die Construction folgender Formel gefunden

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \cdot BD,$$

oder, wenn man die, diese Linien bezeichnenden, Buchstaben in diese Formel setzt und die Wurzel auszieht

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\,ad.}$$

Beweis. Das Dreieck ADC ist ein rechtwinkliges und besteht aus dem rechtwinkligen Dreieck BDC und dem stumpfwinkligen Dreieck ABC.

Der Gang des Beweises ist: aus den Seiten der rechtwinkligen Dreiecke ADC und BDC auf die des stumpfwinkligen überzugehen.

Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist

$$1)\quad AC^2 = AD^2 + CD^2.$$

Wird nun das Quadrat von AD = AB + BD in seine Bestandtheile zerlegt, so entsteht

$$2)\quad AD^2 = AB^2 + 2\,AB \cdot BD + BD^2.$$

Wird CD^2 durch die beiden andern Seiten des rechtwinkligen Dreiecks BDC dargestellt, so ist

$$3)\quad CD^2 = BC^2 - BD^2.$$

Werden die Werthe der Gleichungen 2 und 3 in die Gleichung 1 eingeführt, so entsteht

$$AC^2 = AB^2 + 2\,AB \cdot BD + BD^2 + BC^2 - BD^2,$$
$$= AB^2 + 2\,AB \cdot BD + BC^2,$$

oder

oder wenn a ſtatt AB, b ſtatt BC, d ſtatt BD und x ſtatt AC geſetzt wird,

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ad,$$

oder $$x = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ad},$$

welches die Sätze ſind, von welchen oben ausgegangen wurde.

§. 83.

Aufgabe. Man ſoll die Formel

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ad}$$

conſtruiren.

Man erhebe die Theile der Gleichung ins Quadrat, ſo entſteht $x^2 = a^2 + b^2 - 2ad$,
und dieſe Gleichung verlangt, daß eine Linie geſucht werde, deren Quadrat dem Summen-Quadrate der Linien a und b, weniger dem doppelten Rechteck aus a und einer dritten Linie d gleich ſey. Das ſpitzwinklige Dreieck wird uns zu Erreichung dieſes Zweckes führen.

Conſtruction. Fig. 96. Es ſey die Linie $a = AC$, $b = AB$, $d = AD$. An dem einen Endpunkte D der Linie AD errichte man eine ſenkrechte unbeſtimmte Linie und trage von dem andern Endpunkte A die Linie AB ſo an, daß ſie die ſenkrechte Linie in dem Punkte B treffe, trage von A auf die Linie AD die Linie AC und verbinde die Punkte C und B durch eine gerade Linie, ſo iſt die Linie BC die geſuchte Linie, und es iſt

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC \cdot AD,$$

oder wenn man die oben angeführte Werthe ſetzt und die Wurzel auszieht $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ad}$.

Beweis. Das ſpitzwinklige Dreieck ABC iſt durch die ſenkrechte Linie BD in zwei rechtwinklige Dreiecke BDC und ADB zerlegt worden, durch deren Benutzung wir unſern Zweck erreichen werden.

In dem rechtwinkligen Dreiecke BDC erscheint die Linie BC als Hypotenuse und man erhält

$$1)\quad BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

Die Linie BD läßt sich mittelst des Dreiecks ABD auf die Linie AD und AB zurückführen, dadurch entsteht

$$2)\quad BD^2 = AB^2 - AD^2.$$

Wird dieser Werth in obige Gleichung eingeführt, so entsteht

$$3)\quad BC^2 = AB^2 + DC^2 - AD^2$$

Da nun aber nach der oben aufgestellten Behauptung in der Gleichung 3 das Quadrat der Linie AC vorkommen soll, so müssen die beiden Ausdrücke $DC^2 - AD^2$ durch diese dargestellt werden. Dieß geschieht auf folgende Art, da $AC = AD + DC$ ist, so ist

$$4)\quad AC^2 = AD^2 + 2\,AD \,.\, DC + DC^2.$$

Wird nun AC^2 in obige Gleichung aufgenommen, so müssen die Werthe, welche dort nicht vorkommen sollen, abgezogen werden, dieß ist $2\,AD \,.\, DC$. Das Quadrat von AD aber muß zweimal abgezogen werden, damit das in der Gleichung 4 erscheinende positive Quadrat bei der Einführung in das negative übergehe. Hiernach gewinnt man

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AD^2 - 2\,AD \,.\, DC,$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2\,AD\,(AD + DC).$$

Da nun aber $AD + DC = AC$ ist, so geht diese Gleichung in folgende über

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AD \,.\, AC,$$

oder, wenn die oben angenommenen Werthe eingeführt werden,

$$x^2 = b^2 + a^2 - 2\,ad$$

und hieraus

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ad}$$

d. h. das Quadrat der Linie, welche in einem Dreiecke einem spitzen Winkel gegenüber steht, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Linien, weniger dem doppelten Rechtecke, welches aus der einen Seite und dem, an dem spitzen Winkel anliegenden Stücke, welches durch das von dem Endpunkte der andern Seite gefällte Loth entsteht, gebildet wird.

die andere Linie AB als Hypotenuse eines Dreiecks. Hieraus ergibt sich nun leicht die Construction.

Auflösung. Man errichte auf dem einen Endpunkte D des Abschnittes AD eine unbestimmte Linie senkrecht, und verlängere den Abschnitt AD um den Ueberschuß DC so, daß AC der gegebenen Linie gleich werde; trage von dem Endpunkte A die Linie AB so an, daß ihr Endpunkt B in die senkrechte Linie falle, ziehe von diesem Einfallspunkte B eine gerade Linie BC nach dem Endpunkte der Linie AC, so ist das hierdurch entstandene Dreieck ABC das gesuchte Dreieck.

Der Beweis ergibt sich aus dem in der Erörterung und Auflösung Gesagten leicht.

§. 77.

Aufgabe. Es sind die zwei, den stumpfen Winkel eines Dreiecks einschließenden Seiten und die Verlängerung der einen, welche durch die von dem Endpunkte der andern auf jene gefällte, Höhe entsteht, gegeben. Man soll das stumpfwinklige Dreieck bilden.

Erörterung. Fig. 97. Das Dreieck ABC sey das gesuchte stumpfwinklige Dreieck, so ist gegeben die Linie AB, die Linie BC, die Linie BD, welche der Abschnitt ist, der durch die, von dem Endpunkte C der Linie BC auf die verlangte AB gefällte, Höhe entstand. Demnach ist der Winkel ADC ein rechter, die Linie BC erscheint als Hypotenuse, der Abschnitt BD als Kathete und die Linie AB als Verlängerung der Kathete. Hieraus ergibt sich leicht die Construction.

Auflösung. Man errichte an dem einen Endpunkt D der gegebenen Verlängerung BD eine unbestimmte senkrechte Linie und trage von dem andern Endpunkte D die Linie BC so an, daß ihr Endpunkt C in die senkrechte Linie falle. Verlängere die Linie BD um die Linie AB und

Beweis. Vermöge des pythagoräischen Lehrsatzes ist

$$AC^2 = 2\,a^2$$

und ferner $$AD^2 = AC^2 + a^2.$$

Wird hierin $2\,a^2$ statt AC^2 gesetzt, so entsteht

$$AD^2 = 2\,a^2 + a^2 = 3\,a^2$$

also $$AD = \sqrt{3\,a^2} = a\sqrt{3}.$$

Zweite Auflösung. Fig. 105. Man setze die Linie AB in gerader Richtung doppelt an einander, so, daß $AC = 2\,AB$, beschreibe über AC einen Halbkreis, trage von dem einen Endpunkte A die Linie AB als Sehne in den Halbkreis und ziehe BC; so ist BC die gesuchte Linie.

Beweis. Vermöge des pythagoräischen Lehrsatzes ist

$$BC^2 = AC^2 - AB^2,$$

setzt man dafür die obigen Werthe, so ist

$$BC^2 = (2\,a)^2 - a^2 = 4\,a^2 - a^2$$
$$= 3\,a^2$$

also $$BC = \sqrt{3\,a^2} = a\sqrt{3}.$$

Dritte Auflösung. Fig. 106. Man setze die gegebene Linie AB viermal in gerader Richtung neben einander, wodurch die Linie ABC entsteht, errichte auf dem Punkte B eine senkrechte unbestimmte Linie, halbire die Linie AC und beschreibe von ihrem Mittelpunkte M einen Kreisbogen, der die senkrechte Linie in einem Punkte E schneide, so ist die hiedurch gefundene Linie BE die gesuchte Linie.

Beweis. Man vollende das Dreieck AEC durch die Linien AE und EC, so ist das Dreieck AEC ein rechtwinkliges und die Linie EB ist das von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse AC gefällte Loth. Hieraus fließt folgende Gleichung $$BE^2 = BC \,.\, AB.$$

Die Linie BC ist aber dreimal so groß, als die Linie AB. Benützen wir diese Bemerkung, so wird

$$BE^2 = 3 \,.\, AB \,.\, AB = 3\,AB^2,$$

also $$BE = \sqrt{3\,a^2} = a\sqrt{3},$$

Diese Gleichung erhellt auch leicht aus dem Rechtecke BDEC, worin $BD = AB$ ist.

Vierte Auflösung. Fig. 107. Man setze die gegebene Linie AB dreimal in gerader Richtung aneinander, wodurch die Linie ABC entsteht, errichte auf dem Endpunkte B der Linie AB eine unbestimmte senkrechte Linie, halbire die Linie ABC und ziehe von ihrem Mittelpunkte M mit der Hälfte von AC als Radius einen die senkrechte Linie durchschneidenden Kreisbogen. Ziehe von diesem Durchschnittspunkt D auf den Endpunkt A die Linie AD, so ist diese die gesuchte Linie.

Beweis. Man vollende das Dreieck ADC, so ist es ein rechtwinkliges. Die Linie DB, welche auf AC senkrecht steht, erzeugt das rechtwinklige Dreieck ADB, welches dem Dreiecke ADC ähnlich ist. Hieraus ergibt sich folgende Proportion

$$AB : AD = AD : AC,$$

die zu der Gleichung führt

$$AD^2 = AB \cdot AC.$$

Da nun $AC = 3\,AB$ ist, so erhält man durch Einführung dieses Werthes

$$AD^2 = 3 \cdot AB \cdot AB = 3\,AB^2,$$

also, da $AB = a$ ist,

$$AD = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

§. 86.

Bemerkungen über die im vorigen §en angegebenen Methoden.

Aus den Auflösungen des §. 85. folgert sich nun leicht die Methode: ein Quadrat zu zeichnen, welches vier-, fünf-, sechs-... n mal so groß, als ein gegebenes ist. Soll nun ein Quadrat gefunden werden, welches n mal so groß, als ein gegebenes ist, so läßt sich nach der ersten Methode dasselbe durch allmähliges Uebergehen von Hypotenuse zu Hypotenuse in rechtwinkligen Dreiecken construiren.

Nach der dritten Methode wird diese Aufgabe gelöst, wenn man die gegebene Linie $(n + 1)$ mal zusammen setzt und zwischen der gegebenen Linie und ihrem n fachen die mittlere geometrische Proportionale sucht. Nach der vierten Methode wird die Aufgabe gelöst, wenn man die gegebene Linie n mal

in gerader Richtung aneinander reiht und zwischen jener und ihrem $(n-1)$fachen die mittlere geometrische Proportionale und zu dieser und der gegebenen Linie die Hypotenuse sucht.

Die zweite Methode ist zwar sehr kurz, läßt sich aber nicht überall, sondern nur in speziellen Fällen anwenden.

Hiebei läßt sich leicht erkennen, daß bei großem n die hier angegebenen Methoden entweder viel Raum erfordern, oder, wie die erste, sehr mühsam und wenig fördernd sind. Es läßt sich zugleich leicht einsehen, daß die 3te Methode gar keine Abkürzungen an die Hand gibt, die beiden andern aber in den meisten Fällen, entweder einzeln oder in Verbindung mit einander, sehr zweckmäßige, was sich durch folgende Bemerkungen bestätigen wird:

Man soll ein Quadrat suchen, welches das Fünffache eines gegebenen ist, oder man soll die Formel $x = \sqrt{5\,a^2} = a\sqrt{5}$ construiren.

Diese Formel wird sich besonders bequem nach der ersten Methode des vorhergehenden §. construiren lassen, wenn man die gegebene Linie a doppelt nimmt und an ihrem Endpunkte die einfache Linie a senkrecht aufträgt. Da nämlich das Quadrat der doppelten Linie viermal so groß, als das der einfachen ist, und die einfache und die doppelte Linie a die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden, so ist das Quadrat der Hypotenuse

$$x^2 = (2\,a)^2 + a^2 = 4\,a^2 + a^2 = 5\,a^2$$

und $$x = \sqrt{5\,a^2} = a\sqrt{5}.$$

Eben so leicht läßt sich ein Quadrat bilden, welches das 17fache eines gegebenen ist, wenn die gegebene Linie a viermal in gerader Linie und unter einem rechten Winkel einmal angesetzt wird, denn alsdann ist

$$x^2 = (4\,a)^2 + a = 17\,a^2$$

und $$x = \sqrt{17\,a^2} = a\sqrt{17}.$$

Zusatz. Nach der zweiten Methode läßt sich diese Formel $x = \sqrt{5\,a^2}$ dadurch construiren, daß man aus der dreifachen

Linie, als Hypotenuse, und der doppelten Linie, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck bildet. Die andere Kathete wird die gesuchte Linie seyn, denn nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist

$$x^2 = (3a)^2 - (2a)^2 = 9a^2 - 4a^2$$
$$= 5a^2,$$

also $$x = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}.$$

Man soll ein Quadrat suchen, welches das Sechsfache des gegebenen ist, oder man soll die Formel

$$x = \sqrt{6a^2} = a\sqrt{6}.$$

construiren.

Diese Formel wird sich besonders bequem nach der dritten Methode construiren lassen; wenn man nämlich Fig. 107. die Linie dreimal in gerader Richtung neben einander setzt, über ihr einen Halbkreis beschreibt, und in dem Punkte B, welcher ihr Zweifaches begränzt, eine senkrechte BD bis zum Durchschnitte D des Halbkreises errichtet, und den Endpunkt D mit dem Punkte C durch die Linie DC verbindet. Die Linie DC ist die Seite des gesuchten Quadrates.

Beweis. Die Proportion

$$BC : DC = DC : AC$$

führt zu folgender Gleichung

$$DC^2 = BC \cdot AC,$$

die Linie $BC = 2a$ und $AC = 3a$. Demnach ist

$$DC^2 = 2a \cdot 3a = 6a^2,$$

also $$DC = \sqrt{6a^2} = a\sqrt{6}.$$

Man soll ein Quadrat suchen, welches das fünfzehnfache eines gegebenen ist, oder man soll die Formel

$$x = \sqrt{15a^2} = a\sqrt{15}$$

construiren.

Man setze die gegebene Linie a fünfmal aneinander, suche zwischen ihrem Fünffachen und Dreifachen die mittlere geometrische Proportional-Linie auf die schon bekannte Weise, so ist die Kathete, welche an dem Abschnitte liegt, welcher dreimal so

groß, als die gegebene Linie, ist, die Seitenlinie des gesuchten Quadrates; denn es ist

$$x^2 = 3a \cdot 5a = 15a^2$$

und hieraus $x = \sqrt{15a^2} = a\sqrt{15}$.

Diese Formel läßt sich auch nach der zweiten Methode sehr leicht und bequem construiren, wenn man die gegebene Linie viermal aneinander setzt, aus dem Vierfachen, als Hypotenuse, und der einfachen Linie, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck bildet. Es ist dann die zweite Kathete des gefundenen Dreiecks die Seite des gesuchten Quadrats, denn es ist

$$x^2 = (4a)^2 - a^2 = 16a^2 - a^2 = 15a^2$$

und hieraus $x = \sqrt{15a^2} = a\sqrt{15}$.

§. 87.

Hieraus zieht man nun leicht folgende Bemerkungen:

1. Nach der ersten Methode lassen sich am zweckmäßigsten die Formeln construiren, welche unter dem Wurzelzeichen Zahlen haben, die sich in Quadrate und in die Einheit zerlegen lassen. Dieß sind also alle Zahlen, welche um Eins größer sind, als irgend eine Quadratzahl, wie z. B.

$$a\sqrt{5} = a\sqrt{4+1} = a\sqrt{2^2+1}$$
$$a\sqrt{10} = a\sqrt{9+1} = a\sqrt{3^2+1}$$
$$a\sqrt{17} = a\sqrt{16+1} = a\sqrt{4^2+1}$$
$$a\sqrt{26} = a\sqrt{25+1} = a\sqrt{5^2+1}$$
$$a\sqrt{37} = a\sqrt{36+1} = a\sqrt{6^2+1}$$

u. s. w.

2. Nach der zweiten lassen sich am zweckmäßigsten die Formeln construiren, welche unter dem Wurzelzeichen Zahlen haben, die sich in eine Quadratzahl, weniger Eins, zerlegen lassen. Dieß kann bei allen Zahlen geschehen, die um Eins kleiner sind, als die Quadratzahlen, wie z. B.

$$a\sqrt{3} = a\sqrt{4-1} = a\sqrt{2^2-1}$$
$$a\sqrt{8} = a\sqrt{9-1} = a\sqrt{3^2-1}$$

$$a\sqrt{15} = a\sqrt{16-1} = a\sqrt{4^2-1}$$
$$a\sqrt{24} = a\sqrt{25-1} = a\sqrt{5^2-1}$$
$$a\sqrt{35} = a\sqrt{36-1} = a\sqrt{6^2-1}$$

u. s. w.

Die Formeln der ersten Art unterscheiden sich von denen der zweiten dadurch, daß bei jenen rechtwinklige Dreiecke aus den Katheten; bei diesen, aus der Hypotenuse und der einen Kathete gebildet werden müssen.

3. Nach der dritten Methode lassen sich besonders zweckmäßig solche Formeln construiren, welche Zahlen unter dem Wurzelzeichen haben, die sich in Faktoren zerlegen lassen, wie man so eben bei der Formel $\sqrt{6a^2}$ gesehen hat.

Dieser Methode sind alle Zahlen unterworfen, die nicht Primzahlen sind. Hiebei ist besonders zu beobachten, daß man unter den Faktoren, worein sich die Zahlen zerlegen lassen, diejenigen zu gewinnen suche, welche um die wenigsten Einheiten unter einander verschieden sind. Soll z. B. ein Quadrat gesucht werden, welches 30mal so groß, als ein gegebenes ist; so kann man die Zahl 30 auf folgende Art zerlegen:

$$30a^2 = 2a \cdot 15a,$$
oder $$30a^2 = 3a \cdot 10a,$$
oder $$30a^2 = 5a \cdot 6a,$$

und man hat also drei Wege die fragliche Linie zu finden. Nach dem ersten muß die gegebene Linie 15mal an sich angereiht und die mittlere geometrische Proportionale zwischen 2a und 15a; nach der zweiten muß zwischen 3a und 10a, und nach der dritten zwischen 5a und 6a die mittlere Proportionale gesucht werden. Es erhellt von selbst, daß der letztere Weg der zweckmäßigste seyn wird.

Soll nun im Allgemeinen die Formel

$$x = \sqrt{n \cdot a^2} = a\sqrt{n}$$

construirt werden, und ist n in die Faktoren p und q zerlegt, wovon p der größere ist; so setze man die Linie a pmal aneinander, suche zwischen pa und qa die mittlere geometrische

Proportionale, so hat man die gesuchte Linie; denn es ist alsdann $x^2 = pa \cdot qa = pq \cdot a^2 = na^2$

oder $x = \sqrt{pa \cdot qa} = \sqrt{pq \cdot a^2} = \sqrt{na^2} = a\sqrt{n}$

§. 88.

Bisher wurden Methoden aufgefunden, um solche Formeln zu construiren, die unter dem Wurzelzeichen Zahlen haben, welche sich entweder in Faktoren zerlegen lassen, oder die um die Einheit größer oder kleiner sind, als die Potenzen der natürlichen Zahlenreihe.

Von allen diesen Fällen sind nun die meisten Formeln ausgeschlossen, welche Primzahlen unter dem Wurzelzeichen führen, denn es gibt nur wenige Primzahlen, die durch die Summe eines Quadrates und der Einheit erzeugt werden.

Die Formeln nun, welche Primzahlen führen, die nicht in die Einheit und eine Quadratzahl zerlegt werden können, lassen sich leicht in die Einheit und in ein Faktoren-Produkt zerlegen, und dann durch die Verbindung beider Methoden lösen.

Folgende Fälle werden hinreichen, diese Behauptung zu bestätigen.

Man soll ein Quadrat suchen, welches das 13fache eines gegebenen ist, oder man soll die Formel

$$x = \sqrt{13a^2}$$

construiren. Fig. 108.

Man setze die gegebene Linie a viermal in gerader Richtung nebeneinander und suche zwischen ihrem Vierfachen AC und Dreifachen BC die mittlere geometrische Proportional-Linie DC, zu dieser Linie DC, und zu a = CE, als Katheten, die Hypothenuse DE; so ist DE die Seitenlinie des gesuchten Quadrates.

Beweis. Die rechtwinkligten Dreiecke ADC und BDC führen zu folgendem Satze

$$DC^2 = AC \cdot BC.$$

Vermöge der Construction ist $AC = 4a$ und $BC = 3a$, und hieraus fließt also

$$DC^2 = 4a \cdot 3a = 12a^2.$$

Wird auf beiden Seiten $EC^2 = a^2$ zugezählt, so entsteht

$$DC^2 + EC^2 = 12a^2 + a^2.$$

Da nun $DC^2 + EC^2 = DE^2$ ist, so gewinnt man hieraus

$$DE^2 = 13a^2$$

und DE die gesuchte Linie, also

$$x = \sqrt{13a^2} = a\sqrt{13}.$$

Auf gleiche Art lassen sich folgende Formeln, welche Primzahlen enthalten, leicht construiren

$$x = \sqrt{7a^2} = \sqrt{2 \cdot 3a^2 + a^2} = a\sqrt{7}$$
$$x = \sqrt{11a^2} = \sqrt{2 \cdot 5a^2 = a^2} = a\sqrt{11}$$
$$x = \sqrt{13a^2} = \sqrt{3 \cdot 4a^2 + a^2} = a\sqrt{13}$$
$$x = \sqrt{19a^2} = \sqrt{3 \cdot 6a^2 + a^2} = a\sqrt{19}$$

. . .
. . .
. . .

Manchmal trifft es sich, daß sich bei einer und derselben Formel beide Methoden anwenden lassen. In diesem Falle wird immer eine der ersten Methoden durch Trennung der gegebenen Zahl in die Quadratzahl und in die Einheit vor der Zerlegung in Faktoren den Vorzug verdienen, wie leicht aus folgender Vergleichung erhellt.

Die Formel $x = \sqrt{10a^2}$ läßt sich darstellen:

1) $x = \sqrt{(3a)^2 + a^2}$,

2) $x = \sqrt{2a \cdot 5a}$.

Im ersten Falle wird nur die Construction eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Linie a und ihrem Dreifachen erfordert; im zweiten Falle wird die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Zwei- und Dreifachen der Linie a; ferner die Construction eines rechtwinkligen Dreiecks aus dieser und dem Dreifachen von a.

Noch auffallender zeigt sich diese Verschiedenheit bei folgenden Formeln:

$$x = \sqrt{26\,a^2}$$

und $$x = \sqrt{50\,a^2},$$

von denen die erstere folgende zwei Constructionen zuläßt:

1. $x = \sqrt{(5\,a)^2 + a^2}$,
2. $x = \sqrt{2\,a \,.\, 13\,a} = \sqrt{2 \,.\, 13\,a^2}$;

die zweite folgende:

1. $x = \sqrt{(7\,a)^2 + a^2}$,
2. $x = \sqrt{2\,a \,.\, 25\,a} = \sqrt{2 \,.\, 25\,a^2}$

u. s. w.

§. 89.

Aufgabe. Man soll ein Quadrat suchen, welches der Hälfte eines gegebenen gleich ist, oder man soll die Formel

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$$

construiren.

Erste Auflösung. Fig. 109. Die Linie des gegebenen Quadrates sey AB. Man halbire die Linie AB und errichte auf ihrem Mittelpunkte M die Hälfte von AB senkrecht, verbinde den Endpunkt C dieser senkrechten mit den beiden Endpunkten A und B der Linie AB, so ist jede dieser Seiten, AC oder CB, die Seite des gesuchten Quadrates.

Beweis. Der Winkel ACB ist ein rechter, und also das Dreieck ACB ein rechtwinkliges Dreieck. Demnach ist also

$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

In den beiden Dreiecken AMC und CMB sind nach der Construction die Linien MC, MA, MB einander gleich, und die beiden Nebenwinkel Rechte, also auch die Dreiecke einander congruent, folglich auch die Linie AC der Linie CB gleich. Demnach fließen aus obiger Gleichung folgende zwei

$$AB^2 = 2\,AC^2$$

und $$AB^2 = 2\,CB^2,$$

oder $\frac{1}{4}AB^2 = AC^2$

und $\frac{1}{2}AB^2 = CB^2$

und hieraus, wenn a ſtatt AB geſetzt wird,

$$AC = CB = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Zweite Auflöſung. Fig. 110. Man halbire die gegebene Linie $a = AB$, ſetze ihre Hälften AC und CD unter einem rechten Winkel aneinander, und ziehe zu beiden Linien die Hypotenuſe AD, ſo iſt die Linie AD die Seite des geſuchten Quadrates.

Beweis. Nach dem pythagoräiſchen Lehrſatze iſt

$$AD^2 = AC^2 + CD^2;$$

Da aber AC und CD der Hälfte von a gleich iſt, ſo geht obige Gleichung in folgende über:

$$AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4},$$

Alſo $$AD = \sqrt{\frac{2\,a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$$

§. 90.

Aufgabe. Man ſoll ein Quadrat ſuchen, welches der dritte Theil eines gegebenen iſt; oder man ſoll die Formel

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{3}}$$

conſtruiren.

Erſte Auflöſung. Fig. 111. Man theile die gegebene Linie $a = AB$ nach §. 11. in drei gleiche Theile ein und ſuche zu ihr und ihrem dritten Theile BC nach §. 17. die mittlere geometriſche Proportional-Linie BD, ſo iſt dieſe Linie die Seite des geſuchten Quadrates.

Beweis. Vermöge der Construction gilt folgende Proportion $BC : BD = BD : AB$,
und hieraus leitet sich die Gleichung

$$BD^2 = BC \cdot AB$$

ab; oder, wenn man $AB = a$ und $BC = \frac{a}{3}$ setzt,

$$BD^2 = \frac{a}{3} \cdot a = \frac{a^2}{3},$$

und somit $BD = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Zweite Auflösung. Fig. 112. Man theile die gegebene Linie AB in drei gleiche Theile, bemerke den Punkt C, der den dritten Theil auf ihr abschneidet, beschreibe über der Linie AB einen Halbkreis, errichte auf der Linie AB an dem Punkte C eine senkrechte Linie CD bis zum Durchschnitte D der Kreislinie und verbinde D mit dem Endpunkte AC des dritten Theils der Linie AB, so ist AD die Seite des gesuchten Quadrates.

Beweis. Die Dreiecke ADB und ACD sind rechtwinklig und einander ähnlich, also fließt hieraus folgende Proportion

$$AC : AD = AD : AB,$$

und aus dieser Proportion folgende Gleichung

$$AD^2 = AC \cdot AB.$$

Da nun $AC = \frac{a}{3}$ und $AB = a$ ist, so erhält man durch Einführung dieser Werthe

$$AD^2 = \frac{a}{3} \cdot a = \frac{a^2}{3},$$

oder $$AD = \sqrt{\frac{a}{3}},$$

und somit ist also die, auf oben angegebene Art gefundene Linie AD die Seite des gesuchten Quadrates.

Dritte Auflösung. Fig. 113. Man bilde aus $\frac{2}{3}a = CB$ als Hypotenuse, und dem dritten Theile von ihr $\frac{1}{3}a = BD$, als Kathete, das rechtwinklige Dreieck CDB, so ist CD die Seitenlinie des gesuchten Quadrates.

Beweis. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist

$$CD^2 = CB^2 - DB^2,$$

Setzt man nun für CB und DB die Werthe von a, so hat man

$$CD^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{a^2}{9}$$

und hieraus $$= \frac{3}{9}a^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$CD = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Zusatz. Nach den hier angegebenen Methoden läßt sich nun leicht die allgemeine Aufgabe lösen. Den n^{ten} Theil eines Quadrates durch ein Quadrat darzustellen, oder folgende Formel zu construiren

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{n}};$$

1) Nach der ersten Methode dadurch, daß man die gegebene Linie in n gleiche Theile theilt, zwischen ihr und ihrem n^{ten} Theile die mittlere geometrische Proportional-Linie sucht, welches dann die gesuchte Linie ist.

2) Nach der zweiten Methode dadurch, daß man die gegebene Linie in n gleiche Theile eintheilt, und zwischen dem n^{ten} und $\frac{n-1^{ten}}{n}$ Theile von ihr die mittlere geometrische Proportional-Linie und dann zu dieser Proportional-Linie und ihrem n^{ten} Theile die Hypotenuse sucht, welches dann die gesuchte Linie ist.

Anmerkung. Es leuchtet von selbst ein, daß die erste Methode vor der zweiten den Vorzug verdient.

Die Anwendung der dritten Auflösung ist nicht auf alle Fälle anwendbar, sondern nur dann, wann der Nenner des, unter dem Wurzelzeichen stehenden, Ausdrucks eine ungerade Zahl ist, also für die Ausdrücke von folgender allgemeiner Form

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2n+1}}$$

Denn alsdann läßt sich der unter dem Wurzelzeichen enthaltene

Ausdruck durch zwei Ausdrücke darstellen, wovon jeder ein Quadrat ist, und deren Differenz dem Ausdruck selbst gleich ist. In diesem Falle läßt sich auch die Gleichung durch das rechtwinklige Dreieck construiren, und man erhält

$$V\frac{a^2}{2n+1} = V\left(\frac{(n+1)^2\,a^2}{(2n+1)^2} - \frac{n^2\,a^2}{(2n+1)^2}\right)$$

denn es ist $(n+1)^2\,a^2 = (n^2+2n+1)\,a^2$,

und $$\frac{(n+1)^2\,a^2 - n^2\,a^2}{(2n+1)^2} = \frac{(n^2+2n+1)\,a^2 - n^2\,a^2}{(2n+1)\,(2n+1)}$$

$$= \frac{(2n+1)\quad a^2}{(2n+1)\,(2n+1)} = \frac{a^2}{2n+1}.$$

Hieraus ergibt sich also folgende Construction. Man theile die gegebene Linie a in so viel gleiche Theile, als der Nenner des Bruches anzeigt, nehme davon $(n+1)$ Theile als Hypotenuse; n als Kathete an und bilde daraus ein rechtwinkliges Dreieck, so gibt die andere Kathete die Seite des gesuchten Quadrates.

Nach dieser Anleitung lassen sich leicht folgende Formeln

$$V\frac{a^2}{3},\ V\frac{a^2}{5},\ V\frac{a^2}{7},\ V\frac{a^2}{11}$$

construiren und es ist

$$V\frac{a^2}{3} = V\left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 a^2 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 a^2\right) = V\left(\frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9}\right) =$$

$$= V\frac{3\,a^2}{9},$$

$$V\frac{a}{5} = V\left(\left(\tfrac{3}{5}\right)^2 a^2 - \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 a^2\right) = V\frac{9\,a^2 - 4\,a^2}{25} =$$

$$= V\frac{5\,a^2}{25},$$

$$V\frac{a}{7} = V\left(\left(\tfrac{4}{7}\right)^2 a^2 - \left(\tfrac{3}{7}\right)^2 a^2\right) = V\frac{16\,a^2 - 9\,a^2}{49} =$$

$$= V\frac{7\,a^2}{49}$$

u. s. w.

Anmerk.

$$a\sqrt{15} = a\sqrt{16-1} = a\sqrt{4^2-1}$$
$$a\sqrt{24} = a\sqrt{25-1} = a\sqrt{5^2-1}$$
$$a\sqrt{35} = a\sqrt{36-1} = a\sqrt{6^2-1}$$

u. s. w.

Die Formeln der ersten Art unterscheiden sich von denen der zweiten dadurch, daß bei jenen rechtwinklige Dreiecke aus den Katheten; bei diesen, aus der Hypotenuse und der einen Kathete gebildet werden müssen.

3. Nach der dritten Methode lassen sich besonders zweckmäßig solche Formeln construiren, welche Zahlen unter dem Wurzelzeichen haben, die sich in Faktoren zerlegen lassen, wie man so eben bei der Formel $\sqrt{6a^2}$ gesehen hat.

Dieser Methode sind alle Zahlen unterworfen, die nicht Primzahlen sind. Hiebei ist besonders zu beobachten, daß man unter den Faktoren, worein sich die Zahlen zerlegen lassen, diejenigen zu gewinnen suche, welche um die wenigsten Einheiten unter einander verschieden sind. Soll z. B. ein Quadrat gesucht werden, welches 30 mal so groß, als ein gegebenes ist; so kann man die Zahl 30 auf folgende Art zerlegen:

$$30a^2 = 2a \cdot 15a,$$
oder $$30a^2 = 3a \cdot 10a,$$
oder $$30a^2 = 5a \cdot 6a,$$

und man hat also drei Wege die fragliche Linie zu finden: Nach dem ersten muß die gegebene Linie 15 mal an sich angereiht und die mittlere geometrische Proportionale zwischen 2a und 15a; nach der zweiten muß zwischen 3a und 10a, und nach der dritten zwischen 5a und 6a die mittlere Proportionale gesucht werden. Es erhellt von selbst, daß der letztere Weg der zweckmäßigste seyn wird.

Soll nun im Allgemeinen die Formel

$$x = \sqrt{n \cdot a^2} = a\sqrt{n}$$

construirt werden, und ist n in die Faktoren p und q zerlegt, wovon p der größere ist; so setze man die Linie a p mal aneinander, suche zwischen pa und qa die mittlere geometrische

Zweite Auflösung. Fig. 112. Man theile die gegebene Linie $a = AB$ in drei gleiche Theile, und suche zwischen $\frac{a}{3} = AC$ und $\frac{2a}{3} = CB$ die mittlere geometrische Proportionale CD und ziehe zu dieser und $\frac{2}{3}a$ die Hypotenuse DB, so ist die Linie DB die gesuchte Seite.

Beweis. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke ADB und CDB rechtwinklige und einander ähnlich, dieß führt zu folgender Proportion

$$CB : DB = DB : AB$$

und diese zu folgender Gleichung

$$DB^2 = CB \cdot AB.$$

Da nun $CB = \frac{2}{3}a$ und $AB = a$ ist, so geht diese Gleichung durch Einführung dieser Werthe in folgende über

$$DB^2 = \frac{2}{3}a \cdot a = \frac{2}{3}a^2$$

oder

$$DB = \sqrt{\frac{2}{3}a^2}$$

wornach also die Linie AB die gesuchte Linie ist.

§. 92.

Nach den beiden, im vorigen §. angegebenen, Methoden läßt sich nun leicht die allgemeine Aufgabe den $\frac{m}{n}^{ten}$ Theil eines Quadrates durch ein Quadrat darzustellen, lösen, oder folgende Formel

$$x = \sqrt{\frac{m \cdot a^2}{n}}$$

construiren, worin nämlich m und n Zahlen, a aber eine Linie bedeutet.

1) nach der ersten Methode. Man theile die gegebene Linie a in so viele Theile, als der Nenner n Einheiten enthält, und suche zwischen der Linie a und so vielen Theilen von ihr, als der Zähler m angibt, (zwischen $\frac{m}{n}$ a und a) die mittlere geometrische Proportional-Linie, so ist diese die Seite des gesuchten Quadrates.

2) nach der zweiten Methode. Man theile die gegebene Linie a in so viele Theile, als der Nenner n andeutet, und suche zwischen der Linie $\frac{m}{n}$ a und zwischen $\frac{n-m}{n}$ a die mittlere

Vermöge der Construction ist $AC = 4a$ und $BC = 3a$, und hieraus fließt also

$$DC^2 = 4a \cdot 3a = 12a^2.$$

Wird auf beiden Seiten $EC^2 = a^2$ zugezählt, so entsteht

$$DC^2 + EC^2 = 12a^2 + a^2.$$

Da nun $DC^2 + EC^2 = DE^2$ ist, so gewinnt man hieraus

$$DE^2 = 13a^2$$

und DE die gesuchte Linie, also

$$x = \sqrt{13a^2} = a\sqrt{13}.$$

Auf gleiche Art lassen sich folgende Formeln, welche Primzahlen enthalten, leicht construiren

$$x = \sqrt{7a^2} = \sqrt{2 \cdot 3a^2 + a^2} = a\sqrt{7}$$
$$x = \sqrt{11a^2} = \sqrt{2 \cdot 5a^2 = a^2} = a\sqrt{11}$$
$$x = \sqrt{13a^2} = \sqrt{3 \cdot 4a^2 + a^2} = a\sqrt{13}$$
$$x = \sqrt{19a^2} = \sqrt{3 \cdot 6a^2 + a^2} = a\sqrt{19}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Manchmal trifft es sich, daß sich bei einer und derselben Formel beide Methoden anwenden lassen. In diesem Falle wird immer eine der ersten Methoden durch Trennung der gegebenen Zahl in die Quadratzahl und in die Einheit vor der Zerlegung in Faktoren den Vorzug verdienen, wie leicht aus folgender Vergleichung erhellt.

Die Formel $x = \sqrt{10a^2}$ läßt sich darstellen:

1) $x = \sqrt{(3a)^2 + a^2}$,

2) $x = \sqrt{2a \cdot 5a}$.

Im ersten Falle wird nur die Construction eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Linie a und ihrem Dreifachen erfordert; im zweiten Falle wird die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Zwei- und Dreifachen der Linie a; ferner die Construction eines rechtwinkligen Dreiecks aus dieser und dem Dreifachen von a.

§. 93.

Bemerkungen über die im §. 92. angegebenen Methoden.

Auch bei den, in §. 92. gegebenen, Methoden lassen sich manche Abkürzungen anwenden, aber es lassen sich hierüber keine allgemeine Vorschriften aufstellen, und die Fälle, welche Abkürzungen zulassen, sind wenigere, als die in den §. 87. und 88. angegebenen.

Die Formeln, welche Abkürzungen zulassen, sind nur solche, worin sich die unter dem Würzelzeichen erscheinenden Brüche in Faktoren zerlegen lassen. In andern Fällen wird dieß nicht immer möglich seyn.

Es mögen zur Verdeutlichung folgende Fälle hier stehen:

Man soll ein Quadrat suchen, welches der sechste Theil eines gegebenen ist, oder man soll die Formel

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{6}}$$

construiren.

Auflösung. Man theile die gegebene Linie $a = AE$ in drei und in zwei gleiche Theile ein, und suche nach §. 17. die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen ihrer Hälfte CB und ihrem Drittel AC, so ist die Linie CD die Seite des gesuchten Quadrats.

Beweis. Vermöge der Construction gilt folgende Proportion $AC : CD = CD : CB$,
und hiernach folgende Gleichung

$$CD^2 = AC \cdot CB.$$

Da $AC = \frac{1}{3}a$ und $CB = \frac{1}{2}a$ ist, so gewinnt man durch Einführung dieser Werthe

$$CD^2 = \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a^2,$$

oder $$CD = \sqrt{\frac{a^2}{6}}$$

und demnach ist also CD die Seite des gesuchten Quadrates.

Aufgabe. Man soll die Formel

$$x = \sqrt{\frac{8 \cdot a^2}{15}}$$

construiren.

Auflösung. Man theile die gegebene Linie AB in fünf und in drei gleiche Theile, und suche dann zwischen $\frac{2}{3}a$ CD und $\frac{4}{5}a = AC$ die mittlere geometrische Proportionale CF, so ist diese die Seite des gesuchten Quadrates.

Beweis. Vermöge der Construction gilt folgende Proportion: $AC : CF = CF : CD$,
und also auch folgende Gleichung:

$$CF^2 = AC \cdot CD.$$

Da nun $AC = \frac{4}{5}a$ und $CD = \frac{2}{3}a$ ist, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$CF^2 = \frac{2}{3}a \cdot \frac{4}{5}a = \frac{8}{15}a^2,$$

und also $$CF = \sqrt{\frac{8}{15}a^2}$$

Es ist also CF die Seite des gesuchten Quadrates.

Unächte Brüche, deren Nenner Quadratzahlen und um Eins kleiner, als die Zähler sind, lassen sich leicht behandeln. Es ist:

$$\sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{17}{16}a^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{16}} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2}$$

u. s. w.

§. 94.

Aufgabe. Man soll die Formel

$$x = \sqrt{a^2 + b \cdot c}$$

construiren.

Auflösung. Man suche nach §. 17. die mittlere geometrische Proportional-Linie d zwischen der Linie b und der

Beweis. Vermöge der Construction gilt folgende Proportion

$$BC : BD = BD : AB,$$

und hieraus leitet sich die Gleichung

$$BD^2 = BC \cdot AB$$

ab; oder, wenn man $AB = a$ und $BC = \frac{a}{3}$ setzt,

$$BD^2 = \frac{a}{3} \cdot a = \frac{a^2}{3},$$

und somit $$BD = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Zweite Auflösung. Fig. 112. Man theile die gegebene Linie AB in drei gleiche Theile, bemerke den Punkt C, der den dritten Theil auf ihr abschneidet, beschreibe über der Linie AB einen Halbkreis, errichte auf der Linie AB an dem Punkte C eine senkrechte Linie CD bis zum Durchschnitte D der Kreislinie und verbinde D mit dem Endpunkte AC des dritten Theils der Linie AB, so ist AD die Seite des gesuchten Quadrates.

Beweis. Die Dreiecke ADB und ACD sind rechtwinklig und einander ähnlich, also fließt hieraus folgende Proportion

$$AC : AD = AD : AB,$$

und aus dieser Proportion folgende Gleichung

$$AD^2 = AC \cdot AB.$$

Da nun $AC = \frac{a}{3}$ und $AB = a$ ist, so erhält man durch Einführung dieser Werthe

$$AD^2 = \frac{a}{3} \cdot a = \frac{a^2}{3},$$

oder $$AD = \sqrt{\frac{a}{3}},$$

und somit ist also die, auf oben angegebene Art gefundene Linie AD die Seite des gesuchten Quadrates.

Dritte Auflösung. Fig. 113. Man bilde aus $\frac{2}{3}a = CB$ als Hypotenuse, und dem dritten Theile von ihr $\frac{1}{3}a = BD$, als Kathete, das rechtwinklige Dreieck CDB, so ist CD die Seitenlinie des gesuchten Quadrates.

Beweis. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist

$$CD^2 = CB^2 - DB^2,$$

Setzt man nun für CB und DB die Werthe von a, so hat man

$$CD^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{a^2}{9}$$

und hieraus $= \frac{3}{9}a^2 = \frac{a^2}{3}$

$$CD = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Zusatz. Nach den hier angegebenen Methoden läßt sich nun leicht die allgemeine Aufgabe lösen. Den n^{ten} Theil eines Quadrates durch ein Quadrat darzustellen, oder folgende Formel zu construiren

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{n}};$$

1) Nach der ersten Methode dadurch, daß man die gegebene Linie in n gleiche Theile theilt, zwischen ihr und ihrem n^{ten} Theile die mittlere geometrische Proportional-Linie sucht, welches dann die gesuchte Linie ist.

2) Nach der zweiten Methode dadurch, daß man die gegebene Linie in n gleiche Theile eintheilt, und zwischen dem n^{ten} und $\frac{n-1^{ten}}{n}$ Theile von ihr die mittlere geometrische Proportional-Linie und dann zu dieser Proportional-Linie und ihrem n^{ten} Theile die Hypotenuse sucht, welches dann die gesuchte Linie ist.

Anmerkung. Es leuchtet von selbst ein, daß die erste Methode vor der zweiten den Vorzug verdient.

Die Anwendung der dritten Auflösung ist nicht auf alle Fälle anwendbar, sondern nur dann, wann der Nenner des, unter dem Wurzelzeichen stehenden, Ausdrucks eine ungerade Zahl ist, also für die Ausdrücke von folgender allgemeiner Form

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2n+1}}$$

Denn alsdann läßt sich der unter dem Wurzelzeichen enthaltene

Ausdruck durch zwei Ausdrücke darstellen, wovon jeder ein Quadrat ist, und deren Differenz dem Ausdruck selbst gleich ist. In diesem Falle läßt sich auch die Gleichung durch das rechtwinklige Dreieck construiren, und man erhält

$$V\frac{a^2}{2n+1} = V\left(\frac{(n+1)^2 a^2}{(2n+1)^2} - \frac{n^2 a^2}{(2n+1)^2}\right)$$

denn es ist $(n+1)^2 a^2 = (n^2 + 2n + 1) a^2$,

und $$\frac{(n+1)^2 a^2 - n^2 a^2}{(2n+1)^2} = \frac{(n^2 + 2n + 1) a^2 - n^2 a^2}{(2n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{(2n+1)\ a^2}{(2n+1)(2n+1)} = \frac{a^2}{2n+1}.$$

Hieraus ergibt sich also folgende Construction. Man theile die gegebene Linie a in so viel gleiche Theile, als der Nenner des Bruches anzeigt, nehme davon $(n+1)$ Theile als Hypotenuse; n als Kathete an und bilde daraus ein rechtwinkliges Dreieck, so gibt die andere Kathete die Seite des gesuchten Quadrates.

Nach dieser Anleitung lassen sich leicht folgende Formeln

$$V\frac{a^2}{3},\ V\frac{a^2}{5},\ V\frac{a^2}{7},\ V\frac{a^2}{11}$$

construiren und es ist

$$V\frac{a^2}{3} = V\left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 a^2 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 a^2\right) = V\left(\frac{4a^2}{9} - \frac{a^2}{9}\right) =$$

$$= V\frac{3a^2}{9},$$

$$V\frac{a}{5} = V\left(\left(\tfrac{3}{5}\right)^2 a^2 - \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 a^2\right) = V\frac{9a^2 - 4a^2}{25} =$$

$$= V\frac{5a^2}{25},$$

$$V\frac{a}{7} = V\left(\left(\tfrac{4}{7}\right)^2 a^2 - \left(\tfrac{3}{7}\right)^2 a^2\right) = V\frac{16a^2 - 9a^2}{49} =$$

$$= V\frac{7a^2}{49}$$

u. s. w.

Anmerk.

Beweis. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist

$$CD^2 = CB^2 - DB^2.$$

Setzt man nun für CB und DB die Werthe von a, so hat man

$$CD^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{a^2}{9}$$

und hieraus $$= \frac{3}{9}a^2 = \frac{a^2}{3}$$

$$CD = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Zusatz. Nach den hier angegebenen Methoden läßt sich nun leicht die allgemeine Aufgabe lösen. Den n^{ten} Theil eines Quadrates durch ein Quadrat darzustellen, oder folgende Formel zu construiren

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{n}};$$

1) Nach der ersten Methode dadurch, daß man die gegebene Linie in n gleiche Theile theilt, zwischen ihr und ihrem n^{ten} Theile die mittlere geometrische Proportional-Linie sucht, welches dann die gesuchte Linie ist.

2) Nach der zweiten Methode dadurch, daß man die gegebene Linie in n gleiche Theile eintheilt, und zwischen dem n^{ten} und $\frac{n-1^{ten}}{n}$ Theile von ihr die mittlere geometrische Proportional-Linie und dann zu dieser Proportional-Linie und ihrem n^{ten} Theile die Hypotenuse sucht, welches dann die gesuchte Linie ist.

Anmerkung. Es leuchtet von selbst ein, daß die erste Methode vor der zweiten den Vorzug verdient.

Die Anwendung der dritten Auflösung ist nicht auf alle Fälle anwendbar, sondern nur dann, wann der Nenner des, unter dem Wurzelzeichen stehenden, Ausdrucks eine ungerade Zahl ist, also für die Ausdrücke von folgender allgemeiner Form

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2n+1}}$$

Denn alsdann läßt sich der unter dem Wurzelzeichen enthaltene

Zweite Auflösung. Fig. 112. Man theile die gegebene Linie a = AB in drei gleiche Theile, und suche zwischen $\frac{a}{3}$ = AC und $\frac{2a}{3}$ = CB die mittlere geometrische Proportionale CD und ziehe zu dieser und $\frac{2}{3}$ a die Hypotenuse DB, so ist die Linie DB die gesuchte Seite.

Beweis. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke ADB und CDB rechtwinklige und einander ähnlich, dieß führt zu folgender Proportion

$$CB : DB = DB : AB$$

und diese zu folgender Gleichung

$$DB^2 = CB \cdot AB.$$

Da nun $CB = \frac{2}{3}a$ und $AB = a$ ist, so geht diese Gleichung durch Einführung dieser Werthe in folgende über

$$DB^2 = \frac{2}{3}a \cdot a = \frac{2}{3}a^2$$

oder $$DB = \sqrt{\frac{2}{3}a^2}$$

wornach also die Linie AB die gesuchte Linie ist.

§. 92.

Nach den beiden, im vorigen §. angegebenen, Methoden läßt sich nun leicht die allgemeine Aufgabe den $\frac{m}{n}$ten Theil eines Quadrates durch ein Quadrat darzustellen, lösen, oder folgende Formel

$$x = \sqrt{\frac{m \cdot a^2}{n}}$$

construiren, worin nämlich m und n Zahlen, a aber eine Linie bedeutet.

1) nach der ersten Methode. Man theile die gegebene Linie a in so viele Theile, als der Nenner n Einheiten enthält, und suche zwischen der Linie a und so vielen Theilen von ihr, als der Zähler m angibt, (zwischen $\frac{m}{n}$ a und a) die mittlere geometrische Proportional-Linie, so ist diese die Seite des gesuchten Quadrates.

2) nach der zweiten Methode. Man theile die gegebene Linie a in so viele Theile, als der Nenner n andeutet, und suche zwischen der Linie $\frac{m}{n}$ a und zwischen $\frac{n-m}{n}$ a die mittlere

geometrische Proportional-Linie, und zu dieser geometrischen Proportional-Linie und $\frac{m}{n}$ a die Hypotenuse, so ist die gefundene Hypotenuse die Seite des gesuchten Quadrates. Diese Methode fällt mit der §. 17, 2. gegebenen zusammen.

Der Beweis zu der ersten Auflösung zieht sich leicht aus folgender Proportion

$$\frac{m}{n} a : x = x : a,$$

woraus sich folgende Gleichung ergibt

$$x^2 = \frac{m}{n} a \cdot a = \frac{m}{n} a^2$$

und $$x = \sqrt{\frac{m}{n} a^2}$$

Der Beweis zu der zweiten Auflösung zieht sich aus folgendem. Bezeichnet man die mittlere geometrische Proportionale zwischen $\frac{m}{n}$ a und $\frac{n-m}{n}$ a durch y, so ergibt sich hieraus folgende Proportion:

$$\frac{m}{n} a : y = y : \frac{n-m}{n} a$$

und hieraus die Gleichung

$$y^2 = \frac{m(n-m)}{n^2} a^2.$$

Wird nun diese Proportional-Linie und die Linie $\frac{m}{n}$ a als Kathete betrachtet und zu beiden die Hypotenuse gesucht, so entstehe $$\frac{m(n-m)}{n^2} a^2 + \frac{m^2}{n^2} a^2 = x^2$$

oder $$\frac{mn}{n^2} a^2 - \frac{m^2}{n^2} a^2 + \frac{m^2}{n^2} a^2 = x^2$$

und hieraus gewinnt man $$x = \sqrt{\frac{m}{n} a^2}$$

§. 93.

Bemerkungen über die im §. 92. angegebenen Methoden.

Auch bei den, in §. 92. gegebenen, Methoden lassen sich manche Abkürzungen anwenden, aber es lassen sich hierüber keine allgemeine Vorschriften aufstellen, und die Fälle, welche Abkürzungen zulassen, sind wenigere, als die in den §. 87. und 88. angegebenen.

Die Formeln, welche Abkürzungen zulassen, sind nur solche, worin sich die unter dem Wurzelzeichen erscheinenden Brüche in Faktoren zerlegen lassen. In andern Fällen wird dieß nicht immer möglich seyn.

Es mögen zur Verdeutlichung folgende Fälle hier stehen:

Man soll ein Quadrat suchen, welches der sechste Theil eines gegebenen ist, oder man soll die Formel

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{6}}$$

construiren.

Auflösung. Man theile die gegebene Linie $a = AE$ in drei und in zwei gleiche Theile ein, und suche nach §. 17. die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen ihrer Hälfte CB und ihrem Drittel AC, so ist die Linie CD die Seite des gesuchten Quadrats.

Beweis. Vermöge der Construction gilt folgende Proportion $AC : CD = CD : CB$,
und hiernach folgende Gleichung

$$CD^2 = AC \cdot CB.$$

Da $AC = \frac{1}{3}a$ und $CB = \frac{1}{2}a$ ist, so gewinnt man durch Einführung dieser Werthe

$$CD^2 = \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a^2,$$

oder $$CD = \sqrt{\frac{a^2}{6}}$$

und demnach ist also CD die Seite des gesuchten Quadrates.

geometrische Proportional-Linie, und zu dieser geometrischen Proportional-Linie und $\frac{m}{n}$ a die Hypotenuse, so ist die gefundene Hypotenuse die Seite des gesuchten Quadrates. Diese Methode fällt mit der §. 17, 2. gegebenen zusammen.

Der Beweis zu der ersten Auflösung zieht sich leicht aus folgender Proportion

$$\frac{m}{n} a : x = x : a,$$

woraus sich folgende Gleichung ergibt

$$x^2 = \frac{m}{n} a \cdot a = \frac{m}{n} a^2$$

und $$x = \sqrt{\frac{m}{n} a^2}$$

Der Beweis zu der zweiten Auflösung zieht sich aus folgendem. Bezeichnet man die mittlere geometrische Proportionale zwischen $\frac{m}{n}$ a und $\frac{n-m}{n}$ a durch y, so ergibt sich hieraus folgende Proportion:

$$\frac{m}{n} a : y = y : \frac{n-m}{n} a$$

und hieraus die Gleichung

$$y^2 = \frac{m(n-m)}{n^2} a^2.$$

Wird nun diese Proportional-Linie und die Linie $\frac{m}{n}$ a als Kathete betrachtet und zu beiden die Hypotenuse gesucht, so entsteht $$\frac{m(n-m)}{n^2} a^2 + \frac{m^2}{n^2} a^2 = x^2$$

oder $$\frac{mn}{n^2} a^2 - \frac{m^2}{n^2} a^2 + \frac{m^2}{n^2} a^2 = x^2$$

und hieraus gewinnt man $$x = \sqrt{\frac{m}{n} a^2}$$

Linie c, und ſetze die Linie a und die Linie d unter einem rechten Winkel aneinander und ſuche zu beiden die Hypotenuſe, ſo iſt dieß die geſuchte Linie x.

Beweis. Aus der Conſtruction folgt die Proportion:

$$b : d = d : c,$$

und hieraus die Gleichung $d^2 = b \cdot c$.

Wird letztere in obige Formel geſetzt, ſo geht ſie in folgende über $x = \sqrt{a^2 + d^2}$

und dieſe Formel wird nach §. 78. durch das rechtwinklige Dreieck conſtruirt.

§. 95.

Aufgabe. Man ſoll die Formel

$$x = a + \sqrt{b^2 - \frac{c \cdot d \cdot e}{f}}$$

conſtruiren.

Auflöſung. Man ſuche nach §. 15. zu der Linie f, als erſtem Gliede, zu d und e, die vierte geometriſche Proportionale k, zwiſchen dieſer und der Linie c aber die mittlere geometriſche Proportionale h, dann ſuche man zu der Linie b, als Hypothenuſe und h, als Kathete, die zweite Kathete m, verlängere dieſe um die Linie a, ſo iſt die Linie a + m die geſuchte Linie.

Beweis. Das Aufſuchen der vierten geometriſchen Proportional-Linie k, zu den drei Linien f, d, e führt nach §. 80. zu folgender Gleichung:

$$k = \frac{d \cdot e}{f}$$

Wird dieſer Werth in obige Formel eingeführt, ſo entſteht

$$x = a + \sqrt{b^2 - c \cdot k}.$$

Das Aufſuchen der mittleren geometriſchen Proportionale h zwiſchen der Linie c und k führt zu folgender Gleichung:

$$h^2 = c \cdot k$$

und die Einführung dieſes Werthes bringt folgende Formel hervor

$$x = a + \sqrt{b^2 - h^2}$$

Wird die zweite Kathete zu b, als Hypotenuse, und h, als die eine Kathete, gesucht, so erhält man

$$\sqrt{b^2 - h^2} = m$$

und hieraus erweist sich die Richtigkeit folgender Gleichung

$$x = a + m.$$

§. 96.

Aufgabe. Man soll folgende Formel

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

construiren.

Erste Auflösung. Man suche zu der Linie a als Hypotenuse und zu b, als die eine Kathete, die zweite Kathete c, ferner zu a, als erstem Gliede, und zu c nach §. 17. die dritte geometrische Proportional-Linie d, so ist die Linie d die gesuchte Linie.

Beweis. Da c die zweite Kathete zu a und b ist, so hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Wird dieser Werth in obige Gleichung eingeführt, so entsteht

$$x = \frac{c^2}{a}$$

Die Aufsuchung der dritten geometrischen Proportional-Linie zu a und c gibt folgende Proportion

$$a : c = c : d,$$

und hieraus die Gleichung $d = \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a} = x$

Demnach ist also die Linie d der gesuchten x gleich.

Zweite Auflösung. Man suche zu der Linie a, als erstem Gliede, der Summe und dem Unterschiede der beiden Linien a und b, die vierte geometrische Proportional-Linie, so ist dieß die gesuchte Linie x.

Beweis. Die gegebene Formel $\frac{a^2 - b^2}{a}$ läßt sich in folgende zerlegen:

$$\frac{a^2 - b^2}{a} = \frac{(a + b)(a - b)}{a} = x$$

Wird daher die Formel $\frac{(a+b)(a-b)}{a}$ nach §. 15. construirt, so findet sich die gesuchte Linie x.

§. 97.

Aufgabe. Man soll die Formel

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2b\sqrt{(c^2 + d^2)}}$$

construiren.

Auflösung. Man suche zu der Linie c und d die Hypotenuse e, dann verfahre man nach §. 83., construire aus der Linie e, als Kathete, und a, als Hypotenuse, ein rechtwinkliges Dreieck, trage auf die Linie e die Linie b an, und verbinde die beiden Endpunkte der Linie a und b durch die Linie f, so ist die Linie f die gesuchte.

Beweis. Die Aufsuchung der Hypotenuse zu c und d führt zu der Gleichung $c^2 + d^2 = e^2$.
Wird dieser Werth in obige Formel eingeführt, so geht jene in folgende Gleichung über

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2b \cdot e}.$$

Die Construction dieser Formel erfordert die Bildung eines Dreiecks aus den Linien a, b, e nach §. 3., was nach der Auflösung geschehen ist.

Allgemeine Bemerkungen

über die

Construction algebraischer Formeln.

§. 98.

In den bisherigen Untersuchungen war der Zweck: Mittel und Wege anzugeben, wie algebraische Formel durch geometrische Construction dargestellt werden können. Alle Formeln, die vorgelegt wurden, sind auch wirklich durch Construction gelöst worden. Dieß darf aber nicht zu der Meinung berechtigen, als wenn alle algebraische Formeln geometrisch auflösbar wären. Ihre Auflösbarkeit ist im Gegentheil bestimmten Beschränkungen unterworfen. Folgendes mag dazu dienen, diese Bestimmungen näher kennen zu lernen.

Unter der Dimension eines algebraischen Ausdrucks wird bekanntlich die Zahl seiner Faktoren verstanden, und man unterscheidet zwischen Ausdrücken der ersten, zweiten, dritten ꝛc. Dimension.

Durch einen Ausdruck von der ersten Dimension deutet man den Ausdruck für eine Größe an, welcher die Einheit zum Exponenten hat, oder auf einen Ausdruck führt, der die Einheit zum Exponenten hat.

Zu den Ausdrücken von der ersten Dimension werden also
1) alle einfachen Größen gerechnet, wie z. B.

$$a, b, c, \ldots$$

2) alle Brüche, deren Zähler eine um die Einheit größere Faktoren-Anzahl, als der Nenner hat, wie z. B.

$$\frac{a \cdot b}{c}, \quad \frac{a b \cdot c}{d \cdot e}, \quad \frac{a^2}{b}, \quad \frac{a^5}{b^2 \cdot c \cdot d}$$

u. s. w.

3) alle durch Wurzelzeichen erhaltene Ausdrücke, welche die Grundgröße in der ersten Potenz darstellen, oder darstellen sollen, wie z. B.

$$\sqrt{a^2},\ \sqrt{a \cdot b},\ \sqrt{\frac{a\,b\,c}{e}},\ \sqrt[3]{a^2 \cdot b},$$

u. s. w.

Die Ausdrücke der beiden letzten Arten können auf Größen, welche die Einheit zum Exponenten haben, zurückgebracht werden.

Unter einem Ausdrucke von der zweiten Dimension wird jeder Ausdruck verstanden, welcher aus zwei Faktoren besteht, oder darauf zurückgebracht werden kann. Solche Ausdrücke sind

1) $a \cdot b,\ a \cdot c,\ a^2,\ b^2$

u. s. w.

2) $\frac{a\,b\,c}{d},\ \frac{a\,b \cdot c \cdot e}{d \cdot f},\ \frac{a^2 \cdot b \cdot e}{d^2},\ \frac{a^4 \cdot e}{f \cdot d \cdot g}$

u. s. w.

3) $\sqrt{a^4},\ \sqrt{ab \cdot c^2},\ \sqrt[3]{a^6},$

u. s. w.

Hieraus folgern sich die Bestimmungen für die Ausdrücke von der dritten und vierten, so wie jeder höhern Dimension, leicht.

Unter einem Ausdrucke von der 0ten Dimension kann streng genommen, nur die Zahl 1 verstanden werden, denn jede Größe, welche den Exponenten 0 hat, ist der Einheit gleich. Es werden jedoch darunter auch Brüche verstanden, die im Zähler und Nenner eine gleiche Faktoren-Anzahl haben, wie z. B. $\frac{a^2}{b^2},\ \frac{a \cdot b}{c^2},\ \frac{a \cdot b \cdot c}{d^2 \cdot e},\ \frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e \cdot f}$

u. s. w.

Insbesondere aber alle Zahlen-Coefficienten, da diese eigentlich nur nähere Bestimmungen der Größen, nicht aber selbst Größen bezeichnen. Bezeichnet man nämlich irgend eine Linie durch a, so bedeutet der Ausdruck 3a nichts anders, als $a + a + a$, oder eine Linie, welche dreimal so groß seyn soll, als die einfache Linie, nicht aber etwa einen Ausdruck von der zweiten

Dimenſion wie a . b, daher gehören alle Ausdrücke von folgender Form $3a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{3}b, \ldots$
zu denen von der erſten Dimenſion.

Aus dem Geſagten fließt ferner die Bemerkung: daß nur von Dimenſionen die Rede ſeyn kann, wenn die algebraiſche Ausdrücke als Produkte betrachtet werden.

§. 99.

In dem vorigen §. ſind die algebraiſchen Ausdrücke unabhängig und nicht in Verbindung mit andern ſtehend, betrachtet worden. Werden ſie mit einander verglichen, ſo führen ſie auf den Unterſchied von gleichen und ungleichen Dimenſionen.

Die algebraiſchen werden nämlich von gleicher Dimenſion ſeyn, wenn ihre Faktoren-Anzahl gleich iſt, oder wenn ſie auf ſolche von gleicher Faktoren-Anzahl zurückgebracht werden können; ſie werden von ungleichen Dimenſionen ſeyn, wenn ihre Faktoren-Anzahl ungleich iſt.

Ausdrücke von gleichen Dimenſionen ſind daher folgende:

$$a \cdot b,\ a^2,\ \frac{a\,b\,c}{c},\ \sqrt{a^4},\ \sqrt{a^2\,b\,c}$$

oder $$a^3,\ \frac{a\,b\,c\,d}{e},\ \frac{a^2\,b^2\,c\,.\,d}{f^3}$$

u. ſ. w.

Ausdrücke von ungleichen Dimenſionen ſind

$$a \text{ und } a\,b\,c,$$

oder $$\sqrt{b\,.\,c} \text{ und } a^2$$

u. ſ. w.

Dieſe Unterſcheidung führt auf den Begriff von homogenen algebraiſchen Ausdrücken. Unter dieſen wird nämlich ein zuſammengeſetzter algebraiſcher Ausdruck verſtanden, deſſen Aggregate lauter gleiche Dimenſionen haben. Ein algebraiſcher Ausdruck kann daher nur dann homogen genannt werden, wenn er aus mehreren Theilen beſteht. Beſteht er nur aus einem Gebilde oder Produkte, ſo kann er nicht zu den homogenen gerechnet werden. Die etwa hiebei vorkommenden Zahlencoefficienten werden nicht berückſichtigt.

Die homogenen Ausdrücke unterscheiden sich auch nach Maaßgabe der einfachen Ausdrücke, in homogene Ausdrücke von der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Dimension.

Homogene Ausdrücke von der ersten Dimension sind also solche, deren einzelne Glieder sämmtlich die Zahl 1 zum Exponenten haben, wie z. B.

$$a + b + c,\ \frac{a \cdot b}{c} - d,\ \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\sqrt{a^2 - b^2},\ d - \sqrt{a^2 - b^2},\ d + \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot c}{e} + \frac{d^2}{g}}$$

$$a + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2} + 2a\sqrt{(d^2 + c^2)}},\ a + \frac{c \cdot d}{f} - \sqrt{\frac{g(h - c)}{4}}$$

u. s. w.

Homogene Ausdrücke von der zweiten Dimension sind solche, deren einzelne Glieder sämmtlich die Zahl 2 zum Exponenten haben, wie z. B.

$$a^2 + ab,\ \frac{c \cdot d \cdot e}{g} + 2a\sqrt{\frac{g\,h}{2}}$$

$$a^2 + a\sqrt{a^2 - \frac{b\,c}{2}},\ \frac{b \cdot a^2 - b \cdot c^2}{c + d}$$

$$a^2 + \frac{a^2 \cdot (b - c)^2}{(c - e)^2},\ a^2 + a\sqrt{\frac{b\,c}{2} + 2d\sqrt{\left(\frac{b^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right)}}$$

u. s. w.

Das Gesagte wird hinreichen, um die homogenen Ausdrücke von jeder höhern Dimension erkennen und bestimmen zu können.

Hieran schließt sich die Bemerkung: ein Ausdruck bleibt noch immer homogen, wenn er durch einen andern homogenen gemessen wird, und der Unterschied zwischen den Exponenten der Größen des Zählers und Nenners gibt die Dimension an, zu welcher dieser Ausdruck gehört.

Der Ausdruck:

$$\frac{b^4 - 3a^2 \cdot b^2 + a^4 + b\,c^3}{a^3 + b^3}$$

ist z. B. ein homogener Ausdruck von der ersten Dimension.

§. 100.

Bedeutung der homogenen Ausdrücke in der Construction.

Man bezeichnet bei der Darstellung der Sätze aus der Geometrie durch algebraische Formeln die Linie durch Buchstaben, oder durch Ausdrücke von der ersten Dimension. Es bedeuten daher alle homogenen Ausdrücke der ersten Dimension Linien, wie dieß aus den §§. 78 — 97. hervorgeht.

Der Flächeninhalt wird, wie dieß aus den Grundsätzen der Geometrie bekannt ist, durch das Produkt zweier Linien dargestellt, daher bedeuten alle homogenen Ausdrücke von der zweiten Dimension Flächen.

Der Körperinhalt wird, wie die Stereometrie lehrt durch das Product dreier Linien ausgedrückt, daher bezeichnen homogene Ausdrücke der dritten Dimension, Körper oder Körperinhalte.

Bei der geometrischen Construction kommt nur die Anwendung der Lineargrößen und der Flächen vor, also nur die homogenen Ausdrücke der ersten und zweiten Dimension; die homogenen Ausdrücke von den höhern Dimensionen sind daher nicht construirbar, und Aufgaben, deren Auflösung auf Formeln von höheren Dimensionen führen, als die genannten, sind durch geometrische Construction nicht lösbar.

Ausdrücke, welche nicht homogen sind, lassen keine geometrische Construction zu. Führt die Auflösung einer Aufgabe auf einen Ausdruck, der nicht homogen ist, so kann er keine geometrische Bedeutung haben; und die Aufgabe und Auflösung ist unmöglich. Würde z. B. die Construction des Ausdrucks

$$a^2 + b$$

verlangt, so würde eine Unmöglichkeit verlangt, denn die Größe a^2 bedeutet eine Fläche, und b eine Linie. Eine Linie b aber mit einer Fläche a^2 vereinigen, wie die Aufgabe verlangt, ist eine Unmöglichkeit.

Oft aber scheint ein algebraischer Ausdruck nicht homogen, oder nicht geometrisch construibar zu seyn, während er es doch

ist; das erste ist der Fall, wenn Zahlen-Coefficienten durch Buchstaben bezeichnet sind, da sie mit Zahlen bezeichnet seyn sollten, wie es z. B. in dem Ausdrucke

$$m^2 \cdot a^2 - m \cdot a \cdot b + b^2$$

der Fall ist, der vollkommen homogen ist, wenn unter m ein Zahlen-Coefficient verstanden wird. Letzterem läßt sich oft durch eine zweckmäßige Veränderung abhelfen, wodurch so fort die Formel leicht construirbar wird. Folgende Beispiele werden dieß verdeutlichen.

§. 101.

Aufgabe. Man soll die Formel

$$\frac{a^3 - b^3}{c}$$

construiren.

Obgleich diese Formel ein homogener Ausdruck von der zweiten Dimension, also eine Fläche ist, so läßt sich doch der Zähler $a^3 - b^3$, auf dem die Möglichkeit der vorgelegten Aufgabe beruht, in dieser Form geometrisch nicht construiren; daher muß man suchen ihn in eine solche Gestalt zu bringen, wodurch die Construction möglich wird. Dieß geschieht, wenn man den Zähler in die Faktoren $a - b$ und $a^2 + ab + b^2$ zerlegt, denn es ist

$$(a - b)(a^2 + a \cdot b + b^2) = a^3 + a^2 \cdot b + ab^2 - a^2 b - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3.$$

Obige Formel geht daher in folgende über

$$\frac{a^3 - b^3}{c} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{c}.$$

In dieser Gestalt ist die Construction der vorgelegten Formel möglich. Sie wird gewonnen, wenn man nach §. 17. zwischen a und b die mittlere geometrische Proportionale c sucht, wodurch sie in folgende übergeht

$$\frac{a^3 - b^3}{c} = \frac{(a - b)(a^2 + c^2 + b^2)}{c}$$

hierauf mittelst des pythagoräischen Lehrsatzes die drei Quadrate

a^2, c^2, b^2 in eines vereinigt, dessen Seite mit d bezeichnet werde. Dadurch erhält man:

$$\frac{a^3 - b^3}{c} = \frac{(a - b) \cdot d^2}{c}!$$

Hierauf suche man zu c, a — b, und d, die vierte geometrische Proportionale f, nach §. 16., wodurch man so fort als Resultat der Construction

$$\frac{a^3 - b^3}{c} = f \cdot d$$

gewinnt.

§. 102.

Aufgabe. Man soll die Formel

$$\sqrt{\frac{a^4 - b^4}{b^2 + c^2}}$$

construiren.

Obgleich diese Formel ein homogener Ausdruck von der ersten Dimension ist, also eine Linear-Größe bedeutet, so ist doch der Zähler, worauf die Möglichkeit der Construction beruht, in dieser Gestalt und somit die ganze Formel nicht construirbar. Sie wird es werden, wenn man den Zähler in folgende Faktoren zerlegt $a^2 + b^2$ und $a^2 - b^2$, denn es ist

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) &= a^4 - a^2 b^2 \\ &\quad a^2 \cdot b^2 - b^4 \\ &= a^4 - b^4;\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich folgende Darstellung

$$\sqrt{\frac{a^4 - b^4}{b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{b^2 + c^2}}.$$

Wird mittelst des pythagoräischen Lehrsatzes zu a und b, als Katheten, die Hypotenuse d, zu a, als Hypotenuse, und b, als Kathete, die Kathete e; zu b und c, als Katheten, die Hypotenuse f gesucht, so wird

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= d^2 \\ a^2 - b^2 &= e^2 \\ b^2 + c^2 &= f^2\end{aligned}$$

Werden diese Werthe in obiger Formel eingeführt, so geht sie in folgende über:

$$\sqrt{\frac{a^4 - b^4}{b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)}{b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{d^2 \cdot e^2}{f^2}}.$$

Wird endlich zu den Linien f, d und e die vierte geometrische Proportional-Linie h gesucht, so gewinnt man

$$\sqrt{\frac{a^4 - b^4}{b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{d^2 \cdot e^2}{f^2}} = \frac{d \cdot e}{f}$$

$$= h$$

und die Linie h ist die gesuchte Linie.

§. 103.

Aufgabe. Man soll die Formel

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{(b^4 + c^4)}}$$

construiren.

Diese Formel ist, wie sich leicht erkennen läßt, eine homogene Funktion von der ersten Dimension. Der Ausdruck unter dem zweiten Wurzelzeichen ist aber in obiger Gestalt geometrisch nicht construibar. Er wird es durch folgende einfache Veränderung werden

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{(b^4 + c^4)}} = \sqrt{a^2 + \sqrt{\left(b^2 b^2 + \frac{c^4}{b^2}\right)}}$$

$$= \sqrt{a^2 + b\sqrt{\left(b^2 + \frac{c^4}{b^2}\right)}}$$

Die Construction wird demnach auf folgende Art gewonnen:

Man suche zu b und c die dritte geometrische Proportional-Linie d, so wird

$$\frac{c^2}{b} = d$$

also

$$\frac{c^2 \cdot c^2}{b^2} = d^2.$$

Wird dieser Werth in obige Formel eingeführt, so entsteht

$$\sqrt{a^2 + b\sqrt{\left(b^2 + \frac{c^4}{b^2}\right)}} = \sqrt{a^2 + b\sqrt{(b^2 + d^2)}}$$

Nun

Nun suche man zu den Linien b und d, als Katheten, die Hypotenuse f, so wird $b^2 + d^2 = f^2$,

und demnach erhält man durch Einführen dieses Werthes

$$\sqrt{a^2 + b\sqrt{f^2}} = \sqrt{a^2 + b.f}.$$

Wird zwischen b und f die mittlere Proportional-Linie g und zu a und g, als Katheten, die Hypotenuse h gesucht, so ist diese Linie die gesuchte und es ist

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{(b^4 + c^4)}} = \sqrt{a^2 + g^2} = h.$$

Auf ähnliche Art läßt sich folgende Formel

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{(b^4 - c^4)}}$$

welche ein homogener Ausdruck von der ersten Dimension ist, construiren.

§. 104.

Aufgabe. Man soll die Formel

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{\left(\frac{b^6 + c^6}{e^2}\right)}}$$

welche ein homogener Ausdruck von der ersten Dimension, also eine Lineargröße ist, construiren.

Die vorgelegte Formel läßt sich in folgende umformen, wodurch sie construibar wird

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{\left(\frac{b^6 + c^6}{e^2}\right)}} = \sqrt{a^2 + \sqrt{\left(\frac{b^4\left(b^2 + \frac{c^6}{b^4}\right)}{e^2}\right)}}$$

Man suche zu b und c die dritte geometrische Proportional-Linie d, so wird $d = \frac{c^2}{b}$ also

$$d^2 = \frac{c^4}{b^2}.$$

Wird diese Gleichung eingeführt, so entsteht

$$\frac{c^6}{b^4} = \frac{d^2 . c^2}{b^2}.$$

Wird nun zu b, c und d die vierte geometrische Proportional-Linie f gesucht, so wird

$$f = \frac{c \cdot d}{b},$$

also

$$f^2 = \frac{c^2 \cdot d^2}{b^2}.$$

Wird f in obige Gleichung eingeführt, so geht sie über in

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{\left(\frac{b^6 + c^6}{e^2}\right)}} = \sqrt{a^2 + b\sqrt{\left(\frac{b^2 (b^2 + f^2)}{e^2}\right)}}$$

Sucht man nun zu b und f, als Katheten, die Hypotenuse h; zu e, b, h die vierte Proportional-Linie g, so wird

$$b^2 + f^2 = h^2$$

$$\text{und } \frac{b^2 (b^2 + f^2)}{e^2} = \frac{b^2 \cdot h^2}{e^2} = g^2,$$

und man gewinnt durch Substitution

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{\left(\frac{b^6 + c^6}{e^2}\right)}} = \sqrt{a^2 + b\sqrt{\left(\frac{c^2 \cdot h^2}{e^2}\right)}}$$

$$= \sqrt{a^2 + b\sqrt{g^2}}.$$

$$= \sqrt{a^2 + b \cdot g}.$$

Wird nun zwischen b und g die mittlere geometrische Proportionale k, und zu k und a, als Katheten, die Hypotenuse m gesucht, so ist m die gesuchte Linie und somit die Construction obiger Formel gegeben.

Auf ähnliche Art läßt sich die Formel

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{\left(\frac{b^6 - c^6}{e^2}\right)}}$$

welche ein homogener Ausdruck von der ersten Dimension, also eine Linear-Größe ist, construiren.

Bemerkungen

über die verschiedenen Arten der Auflösung geometrischer Aufgaben.

§. 105.

Bei der Auflösung der geometrischen Aufgaben lassen sich leicht drei Arten erkennen, die sich auf folgende Weise unterscheiden lassen.

1) Die rein geometrische,
2) die analytisch-constructionelle, oder auch analytische,
3) die algebraische Auflösung.

Jede Aufgabe kann nämlich, entweder durch Cirkel und Lineal, oder durch Rechnung aufgelöst werden. Geschieht das Erstere, so wird die Auflösung nur aus dem Gebiete der Geometrie und durch die Hülfsmittel, die sie bietet, gerade Linie, Winkel, Kreislinie ꝛc. geschöpft.

Alle andere Hülfsmittel, welche nicht in diesem Gebiete liegen, sind ausgeschlossen. Diese Bestimmung rechtfertigt ihre Benennung, die ihr in den Worten: rein geometrische beigelegt ist. Alle Aufgaben des ersten Kapitels sind auf diese Art gelöset.

Ihr gegenüber stehen die beiden andern Auflösungsarten, die analytisch constructionelle oder analytische und die algebraische. Beide unterscheiden sich von der rein geometrischen Auflösung dadurch, daß sie die Lehren der Algebra auf die Geometrie anwenden, die Auflösung durch den Calcul geben, und nach gefundener Gleichung, oder Formel zur Darstellung der Figur selbst übergehen.

In der Darstellung der Figuren aber unterscheiden sie sich von einander, und diese Verschiedenheit führt zu den oben aufgestellten Benennungen. Ist nämlich mittelst der Rechnung eine Formel für die Darstellung einer Figur gefunden, so kann ihre Ausführung auf zweierlei Art geschehen:

1) entweder dadurch, daß die für die Auflösung einer Aufgabe gefundene Formel nach den Sätzen der Geometrie construirt, d. h. mittelst Cirkel und Lineal dargestellt wird, wozu die Anleitung in den §. 74 — 104. gegeben wurde;

2) oder dadurch, daß der Werth der in der Formel enthaltenen Linien berechnet und ihre Größe durch einen Maasstab ausgemittelt, und dann sofort hieraus die gesuchte Figur unmittelbar gebildet wird.

Die unter 1 beschriebene Darstellung vereinigt die Rechnung mit der Construction und heißt daher füglich *analytisch-constructionell*, die unter 2 beschriebene Darstellung ist eine *mechanische*, und fordert Zahlen zu der Darstellung der gesuchten Linien. Sie kann daher füglich *die algebraische* heißen.

Die *analytisch-constructionelle* hat, wie wir in den vorhergehenden §§. dieses Kapitels gesehen haben, manche Sätze aus der Geometrie nöthig, um die ihr vorgelegten Aufgaben mittelst der Construction entwickeln zu können, als da sind: der pythagoräische Lehrsatz, die Sätze von der Proportionalität der Linien, von der Aehnlichkeit der Dreiecke und ihrer Seiten, manche Eigenschaften des Kreises, die Sätze für die Berechnung des Flächenraums ꝛc. Die *algebraische* erfordert zur Darstellung einer Figur diese Hülfssätze nicht, sondern sie berechnet schlechthin die Größe der nöthigen Linien nach irgend einem Maasstabe in Ruthen, Fuß, Zoll, Linien ꝛc. und bildet aus den so berechneten Linien, die ihr vorgeschriebene Figur.

§. 106.

Nähere Erörterung über die Verschiedenheit dieser Constructions-Arten.

Um den Charakter dieser drei verschiedenen Constructions-Arten noch genauer zu erkennen und zu unterscheiden, mag die §. 36. gegebene Aufgabe dienen. Sie heißt:

Es sind drei Linien gegeben. Man soll sie an einem Punkte unter solchen Winkeln zusammen-

stellen, daß ihre Endpunkte in einer geraden Linie liegen und gleichweit von einander abstehen.

Die rein geometrische Auflösung ist dort Fig. 44. gegeben. Sie beruht darauf, daß das Dreieck GDF, worin zwei von den gegebenen Linien GD und DF vorkommen, so an die Linie K angetragen wird, daß die Linie EH der Linie GD, die Linie EF der Linie FD und FH der Linie GF gleich wird, wodurch die Aufgabe gelöset ist.

Die analytisch-constructionelle Auflösung dieser Aufgabe ist folgende: Es seyen Fig. 115. die drei gegebenen Linien AB = a, BC = b, BD = c in einem Punkte B so vereinigt, daß die Linie AC = CD sey, so hängt die Auflösung der Aufgabe, wie leicht erhellt, von der Darstellung oder Auffindung der Linie AC oder CD ab, denn ist diese gegeben, so kann sofort die Figur sogleich construirt werden. Nennt man die Linie AC = CD = x, und fällt man von dem Punkte B die senkrechte Linie BE, um Gleichungen für die Linien zu bekommen, so ergeben sich hieraus, wenn CE = y und BE = h genannt wird, nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichungen:

1) $h^2 = b^2 - y^2$,

2) $h^2 = c^2 - (x - y)^2$,

3) $h^2 = a^2 - (x + y)^2$,

setzt man die erste und zweite Gleichung zusammen, so entsteht

$$b^2 - y^2 = c^2 - (x - y)^2$$

und hieraus, wenn $-(x - y)^2$ entwickelt wird,

$$b^2 - y^2 = c^2 - x^2 + 2xy - y^2.$$

Wird hierin y ausgeschieden, so entsteht

$$4)\quad y = \frac{b^2 - c^2 + x^2}{2x}.$$

Setzt man die erste und die dritte Gleichung zusammen, so entsteht $b^2 - y^2 = a^2 - x^2 - 2xy - y^2$,

und hieraus $$5)\quad y = \frac{a^2 - b^2 - x^2}{2x}.$$

Setzt man die 4te und 5te Gleichung zusammen, so entsteht:

$$\frac{b^2 - c^2 + x^2}{2x} = \frac{a^2 - b^2 - x^2}{2x}.$$

Wird durch $2x$ gemeſſen, x^2 auf eine Seite gebracht, ſo entſteht $2x^2 = a^2 + c^2 - 2b^2$,

und hieraus $x = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - b^2}$.

Die Darſtellung der Linie x oder AC erfordert daher, Fig. 116., folgende Conſtruction: Man ſuche zu AF $= \frac{1}{2}a$ die Hypotenuſe F'F, und zu A'G $= \frac{1}{2}c$ die Hypotenuſe G'G, und zu den Linien GG' = AH und FF' = AK, als Katheten, die Hypotenuſe KH, zur Linie BC = HM, als Kathete, und HK, als Hypotenuſe, die Kathete AC, ſo iſt die Linie MK, die Linie, welche die Entfernung angibt, worin die Endpunkte A, C, D, der Linien AB, CB, DB aufgeſtellt werden müſſen. Werden nun die beiden größern, als die äuſſern, und die kleinere, als die mittlere, angetragen, ſo entſteht Fig. 115., welche ſofort den Anforderungen der Aufgabe Genüge leiſtet.

Der Beweis über die Richtigkeit der Conſtruction führt ſich leicht.

Die algebraiſche Auflöſung dieſer Aufgabe iſt folgende: Man erhebe die Werthe der drei gegebenen Linien in ihre Quadrate, zähle die der beiden äuſſern zuſammen und halbire ihre Summe, ziehe davon das Quadrat der mittlern ab und aus dem Ueberreſte die Quadrat-Wurzel, ſo gibt der hierdurch erhaltene Zahlenwerth die Größe der geſuchten Entfernung je zweier Endpunkte der gegebenen Linien an.

Rechnung. Es ſey $a = 6' 5''$, $b = 5'$, $c = 7' 5''$, ſo iſt

$a^2 = 65'' \cdot 65'' = 42' 25''$

$c^2 = 75'' \cdot 75'' = 56' 25''$

$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(98' 50'') = 46' 25''$

$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - b^2 = 46' 25'' - 25' = 21' 25''$

Demnach iſt alſo $x = \sqrt{21' 25''} = 4' 6'',097....$

§. 107.

Von der Auffindung der Conſtructions-Arten.

Ueber die Auffindung der verſchiedenen Conſtructions-Arten, oder die Auflöſung geometriſcher Aufgaben laſſen ſich keine Vorſchriften ertheilen.

Die rein geometrische Constructionsart setzt genaue Bekanntschaft mit den Lehrsätzen der Geometrie voraus; und niemand, der mit ihnen nicht vollkommen vertraut ist, wird eine Fertigkeit in der Auflösung geometrischer Aufgaben erlangen. Soll eine Aufgabe auf ihrem Wege gelöst werden, so wird es sehr zweckmäßig seyn, sich die Bedingungen und Forderungen der Aufgabe deutlich vor Augen zu stellen und darnach eine Figur zu entwerfen, welche die Aufgabe als gelöst darstellt, und dann zu suchen, auf welche Art die bekannten Sätze der Geometrie auf sie angewendet werden können, damit der Zweck erreicht werde und sich eine Entwickelung ergebe. Schickliche Zusammenstellungen führen oft sehr schnell zu einer Auflösung.

Die rechnende Auflösung (also die analytisch-constructionelle und algebraische) setzt nebst der genauen Bekanntschaft mit den Lehren der Geometrie, auch vollkommene Vertrautheit mit denen der Algebra voraus.

Hiebei kommt es besonders auf eine schickliche Wahl der unbekannten Größe an, um an sie die Auflösung anknüpfen zu können. Auch hier wird es zweckmäßig seyn, nach den Bedingungen und Forderungen der Aufgabe sich eine Figur zu bilden und darnach eine oder mehrere Gleichungen zu construiren, worauf sofort nach den Lehren der Algebra die unbekannte Größe durch eine Formel dargestellt werden muß, um die constructionelle oder algebraische Auflösung zu gewinnen. Allgemeine Vorschriften für diese Methode lassen sich eben so wenig, als für die rein geometrische Methode geben. Combination und richtige Beurtheilung des vorgelegten Falles wird hier, wie dort, am schnellsten zum Ziele führen. Die geometrischen Hülfssätze, welche hiebei nöthig sind, sind schon früher §. 105. angegeben worden.

Oft führt eine Methode schneller, als die andere, zum Ziele und gibt eine Auflösung, während die andere ihre Dienste versagt, oder doch zu versagen scheint.

§. 108.

Vergleichung der Constructions-Methoden.

Bei der Auflösung geometrischer Aufgaben, wobei zunächst Einübung und festes Aneignen der aus der Geometrie

erlernten Sätze, Entwicklung des Scharfsinns und Anwendung des Erlernten bezweckt wird, zeigt es sich sogleich, daß besonders die rein geometrische und ihr zunächst die analytisch-constructionelle Methode berücksichtigt werden muß; die algebraische, als die mechanische, kann hier weniger berücksichtigt werden, indem ihr die Vortheile, welche jener zukommen, mangeln. Die algebraische, oder mechanische, kann in der praktischen Geometrie sehr zweckmäßig angewendet werden, so wie in solchen Fällen, wo die Größe einer Linie nach irgend einem Maasstabe genau berechnet werden soll, kann aber hier nicht berücksichtigt werden.

Die rein geometrische Methode ist in der Regel die kürzeste und einfachste. Manchmal ist es die analytisch-constructionelle; aber eigentlich ist erstere immer vorzuziehen, weil sie ihre Zuflucht nicht zur Hülfe einer fremden Wissenschaft nimmt. Oft versagt die eine ihre Dienste und verweiset auf die andere. Deßwegen sind im folgenden beide Methoden benutzt, und sehr häufig beide Auflösungsarten bei einer Aufgabe angewendet. Auf die rechnende Auflösung ist keine Rücksicht genommen.

Anmerkung. Die Methode durch den Zirkel allein, und ohne Beihülfe des Lineals die Aufgabe zu lösen, ist, als dem beabsichtigten Zwecke fremd, nicht aufgenommen.

Bemerkungen über die Ausführung der Construction einer Formel.

§. 109.

Unterschied der einfachen und zusammengesetzten Construction.

Da auf der Ausführung einer aufgefundenen Construction die Richtigkeit und Genauigkeit der Auflösung der vorgelegten Aufgabe beruht, so wird es nicht überflüssig seyn, hier etwas über die Art und Weise, wie eine Construction ausgeführt werden soll, zu bemerken.

Die vorzunehmenden Constructionen lassen sich füglich in einfache und zusammengesetzte eintheilen.

Unter einfachen Constructionen werden hier alle Constructionen der Linien, des Dreiecks, des Kreises verstanden, wozu nur die Elementarsätze nöthig sind, wie z. B. die Errichtung der senkrechten Linien, Ziehen der Parallelen, die Bestimmung der Proportional-Linien, die Bildung der Dreiecke aus drei gegebenen Stücken ꝛc.

Die Constructionen folgender Formeln

$$\sqrt{a^2+b^2},\quad \sqrt{a^2-b^2},\quad \sqrt{a.b},\quad \frac{a.b}{c}$$

werden also zu den einfachen gehören.

Unter einer zusammengesetzten Construction werden solche verstanden, zu deren Ausführung zwei oder mehrere einfache Constructionen nöthig sind. Hiebei kommt es gar nicht darauf an, ob durch die Construction eine Linie, ein Dreieck ꝛc. bestimmt werden soll, sondern nur darauf, ob bei der Ausführung einer Construction zwei oder mehrere einfache Geschäfte nöthig sind.

Die Bildung eines Dreiecks, oder die Auftragung einer Linie, wozu z. B. die Bestimmung einer Proportionale, die Errichtung einer senkrechten und die Ziehung einer Parallel-Linie nöthig wird, wird eine zusammengesetzte Construction genannt werden müssen, denn es sind zur wirklichen Ausführung derselben mehrere einfache Geschäfte nöthig, die alle nach und nach vorgenommen werden müssen.

Die Constructionen folgender Formeln:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}d^2},\quad \sqrt{b^2-\tfrac{1}{2}c^2},\quad \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2+\tfrac{1}{2}d^2-c^2}$$

$$a+b-\sqrt{a^2-2bc},\quad \sqrt{c^2+a\sqrt{(b^2-c^2)}},\ \ldots$$

so wie die meisten der in den §§. 74 — 104. angegebenen Constructionen gehören zu den zusammengesetzten.

§. 110.

Ueber die Ausführung der einfachen Construction.

Da die Auflösung jeder Aufgabe auf der Genauigkeit und Richtigkeit der Construction beruht, so werden letztere bei der Ausführung besonders anzuwenden seyn. Bei der Ausführung werden daher die zu ziehenden Linien richtig gezogen und scharf

begrenzt seyn müssen. Die Durchschnitte der Linien, wenn sie willkührlich angenommen werden können, sind am zweckmäßigsten so zu nehmen, daß die Linien rechte Winkel bilden, oder doch solche, die einem rechten möglichst nahe kommen. Kommen Fälle vor, wo von gegebenen Linien durch Kreisbögen bestimmte Entfernungen abgeschnitten werden sollen, so sind zweckmäßiger die Entfernungen durch die Zirkel abzustecken, oder aufzutragen, als durch Kreisbögen abzuschneiden, weil durch Ersteres ein richtigeres Resultat gewonnen wird, wie dieß aus manchen Zeichnungen des ersten Kapitels hervorgeht. Die Parallel-Linien können mechanisch durch das Lineal und das Rechteck gezogen, oft auch und richtiger durch das Auftragen gleicher Linien nach §. 5. Nro. 3. gewonnen werden.

Durch die Ausführung der Zeichnungen und durch Uebung wird man von selbst auf zweckmäßige Abkürzungen geführt, worüber sich im Allgemeinen keine Regeln aufstellen lassen.

§. 111.

Ueber die Ausführung der zusammengesetzten Constructionen.

Ueber die zweckmäßigste Art der Ausführung einer einfachen Construction läßt sich dann leicht entscheiden, wenn die Auflösung einer Aufgabe mehrere einfache Constructionsarten zuläßt, die nicht in Verbindung mit einander stehen; denn in diesem Falle wird diejenige den Vorzug verdienen, die bei gleicher Richtigkeit und Genauigkeit die wenigsten Geschäfte nöthig macht. Fälle der Art sind in dem ersten Kapitel mehrere vorgekommen und es wurde immer auf die kürzeste Construction aufmerksam gemacht.

Wird die Ausführung einer solchen Construction erfordert, welche auf der Verbindung mehrerer einfachen Constructionen miteinander beruht, so wird ihre zweckmäßige Anordnung unter einander sehr viel zur Erleichterung der Auflösung beitragen. Auch hierüber lassen sich keine allgemeine Regeln mittheilen. Das richtige Auffassen der auszuführenden Construction wird hier am sichersten zum Ziele führen.

§. 112.

Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen.

Es sind zwei Linien, deren Größe durch folgende Formeln bestimmt ist:

1) $AB = CD + \sqrt{2 . CD . EF}$,

2) $BC = EF + \sqrt{2\ CD . EF}$,

unter einem rechten Winkel zusammen zu setzen, und ihre Endpunkte durch eine gerade Linie zu verbinden.

Die Auflösung dieser Aufgabe beruht auf der Construction der Formel

$$\sqrt{2\ CD . EF}$$

und auf der Verbindung der hierdurch gebildeten Linie mit den Linien CD und EF.

Aus der Construction der vorgelegten Aufgabe sind daher nach §. 17. zwei Auflösungen möglich:

1) Fig. 117. Man trage auf der größern Linie EF die Linie CD doppelt, 2 CD = EG, auf und errichte in dem Punkte G eine Linie GH senkrecht. Halbire die Linie EF und trage von ihrem Mittelpunkte M die Hälfte von EF = ME an die senkrechte EH so auf, daß ihr Endpunkt E in jene falle, wodurch die Linie GK entsteht, verbinde die beiden Punkte E K durch die gerade Linie EK und verlängere sie um die Linie CD, wodurch die Linie ED entsteht, errichte in dem Punkte D die senkrechte Linie

$$DP = EK + EF$$

und verbinde die Endpunkte E und P der beiden Linien durch die gerade Linie EP, so ist die Aufgabe gelöset.

2) Fig. 118. Man trage die Linie 2 CD = GE und die Linie EF in gerader Richtung aneinander, errichte in dem Punkte E eine senkrechte Linie EH, halbire die Linie GF und schneide von ihrem Mittelpunkte M aus mit der Hälfte von GF = MG die Linie EK von der senkrechten Linie ab, verlängere die Linie EK um CD = KD und die Linie EF um EK = FA, und verbinde die Endpunkte D und A der Linien ED und EA durch die gerade Linie EA, so ist die Aufgabe gelöset.

Von der Richtigkeit der Construction in beiden Fällen überzeugt man sich leicht. Ebenso leicht überzeugt man sich aber auch davon, daß die zweite Auflösung bei weitem kürzer und zweckmäßiger ist, als die erste, indem bei ihr die Errichtung einer zweiten Vertikallinie wegfällt, und die vollendete Ausführung der Construction an die schon gezogenen Linien angeknüpft wird.

Fälle der Art werden sich in dem folgenden Kapitel viele darbieten.

§. 113.

Ferner muß man noch berücksichtigen, daß bei der geometrischen Construction algebraischer Formeln nicht immer die kürzeste algebraische Darstellung auch die kürzeste geometrische Construction erzwecken werde. Im Gegentheile zeigt es sich, daß gerade die kürzere algebraische Form oft eine weitläufigere geometrische Construction veranlasse. Daher hat man vorher wohl zu erwägen, welche Darstellung die zweckmäßigere sey.

Zur Erläuterung möge folgendes Beispiel dienen.

Es ist die Formel

$$1)\quad x = \sqrt{AB^2 - CB^2 + (AB - CB)^2}$$

zu construiren.

Die vorgelegte Formel läßt sich entweder unter der vorgelegten Gestalt construiren, oder sie läßt sich, wenn die angedeuteten Geschäfte ausgeführt werden, auf folgende kürzere Gestalt zurückführen:

$$x = \sqrt{AB^2 - CB^2 + AB^2 - 2\,CB\,.\,AB + CB^2},$$

$$2)\quad x = \sqrt{2\,AB^2 - 2\,CB\,.\,AB}$$

$$= \sqrt{AB\,.\,2(AB - CB)}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Constructionen:

1) nach der Formel 1. Fig. 119. Man errichte auf dem Endpunkte C der Linie CB eine Linie CG senkrecht und trage von dem andern Endpunkte B die Linie AB zwischen die Linie CB und CG, wodurch die Linie AC entsteht. Nun trage

man von dem Endpunkte C die Linie CE = AB — CB auf die Linie CB und verbinde die beiden Punkte A und E durch die gerade Linie AE, so ist die Linie AE die gesuchte.

2) Fig. 120. Man trage die Linie AB und 2 (AB — CB) = BE in gerader Linie aneinander. Errichte im Punkte B die Linie BH senkrecht, halbire die Linie AE und schneide von ihrem Mittelpunkte M aus mit ME = ½ AE von der senkrechten Linie das Stück BG ab, so ist diese Linie die gesuchte.

Hieran läßt sich nach §. 17, 2. noch eine dritte Construction knüpfen, die jedoch hier nicht besonders angeführt wird. Leicht überzeugt man sich nun von der Richtigkeit beider Constructionen, so wie davon, daß die erste Construction, obgleich der Anlage nach scheinbar weitläufiger, dennoch kürzer und in den meisten Fällen zweckmäßiger ist.

Wie vorsichtig man ferner in der Ausführung der geometrischen Construction algebraischer Formeln seyn müsse, zeigt sich endlich darin, daß sogar eine verschiedene Anordnung in der Ausführung der durch eine Formel angedeuteten Geschäfte Einfluß auf die zweckmäßigste Construction hat; dieß erhellt aus der Construction der oben angegebenen Formel

$$x = \sqrt{AB^2 - CB^2 + (AB - CB)^2}$$

die den Vorzug vor der Construction folgender mit ihr gleichbedeutenden, aber in Form und Ausführung verschiedenen Formel

$$x = \sqrt{AB \cdot 2\,(AB - CB)}$$

verdient. Die fragliche Formel läßt sich, wie es in 1. geschah, in der dort gegebenen Anordnung der einzelnen Theile construiren, sie läßt sich aber auch in folgender Stellung construiren $x = \sqrt{AB^2 + (AB - CB)^2 - CB^2}$

Diese Anordnung führt zu folgender Construction Fig. 121.

3) Man setze die Linie AB und den Unterschied von AB — CB = BE rechtwinklig aneinander und ziehe die Linie AE, trage von B aus die Linie BC auf die Linie BE und

die Linie AE = FC von C aus zwischen BC und BA, wodurch FB entsteht, so ist die Linie FB die gesuchte.

Diese Construction steht auch an Kürze hinter der Nro. 1. Fig. 119. gegebenen zurück. Sie kann jedoch manchmal jener vorzuziehen seyn und zwar dann, wann die zu suchende Linie mit einer andern unter einem rechten Winkel in Verbindung treten soll.

Das Gesagte mag hinreichen, um auf die zweckmäßigste Anordnung in der Ausführung der Constructionen aufmerksam zu machen. Leicht ließen sich noch mehrere, zur Bestätigung des Gesagten dienende, Fälle anführen.

Drittes Kapitel.

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.

§. 114.

Voterinnerungen.

In einem rechtwinkligen Dreieck steht bekanntlich dem rechten Winkel die Hypotenuse und den beiden spitzen Winkeln stehen die beiden Katheten gegenüber, und zwar dem größern Winkel die größere, dem kleinern Winkel die kleinere Kathete.

Fällt man in einem Dreieck ABC von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine senkrechte Linie AD Fig. 122., so theilt sie die Hypotenuse in zwei Theile BD und DC, welche die Abschnitte der Hypotenuse genannt werden. Die senkrechte Linie AD selbst heißt die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks, und diese wird immer verstanden werden, wenn von der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks die Rede seyn wird. Jede der beiden Katheten kann auch als Höhe des rechtwinkligen Dreiecks betrachtet werden.

Die Höhe AD ist bekanntlich die mittlere geometrische Proportional-Linie zwischen den beiden Abschnitten DC und BD der Hypotenuse.

Im Folgenden wird bei analytischen Entwickelungen die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks durch H, seine Höhe durch h; die größere Kathete durch K, die kleinere durch k; der größere Abschnitt durch A, der kleinere durch a; der rechte Winkel durch R bezeichnet werden.

Die Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade wird bei vorkommenden Fällen vorausgesetzt.

§. 115.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und die Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 122.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC, die Höhe EB. Man halbire die gegebene Hypotenuse und beschreibe von ihrem Mittelpunkte aus mit ihrer Hälfte einen Halbkreis BAC; errichte an irgend einem beliebigen Punkte B der Hypotenuse die Höhe BE senkrecht, und ziehe durch den Endpunkt E die Linie EA parallel mit BC bis zum Durchschnitte A des Kreisbogens, und ziehe von A die Linien AB und AC, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Man fälle von A auf BC die Linie AD senkrecht, so sind die beiden Linien BE und DA, da sie zwischen zwei Parallel-Linien liegen und senkrecht aufstehen, einander gleich. Das Dreieck ABC hat also die gegebene Höhe. Der Winkel BAC liegt mit seiner Spitze in der Peripherie des Halbkreises BAC und steht mit seinen Schenkeln auf den Endpunkten des Diameters dieses Halbkreises auf; ist also ein Rechter. Das Dreieck ABC ist also rechtwinklig, hat die gegebene Hypotenuse und Höhe.

Anmerkung. Die durch den Punkt E, parallel mit BC gezogene Linie wird den Halbkreis BAC entweder durchdringen, oder berühren, oder ihn weder durchdringen noch berühren.

Wird sie ihn durchdringen, so sind zwei Durchschnittspunkte A und A' möglich und dann entsteht neben dem rechtwinkligen Dreieck ABC, ein zweites A'BC, das mit ihm congruent und nur der Lage nach von ihm verschieden ist, wie man sich leicht überzeugen kann.

Wird sie ihn berühren, so ist die EA eine Tangente, und die Höhe EB wird dem Radius, oder der halben Hypotenuse gleich, und dann ist nur ein Dreieck möglich.

Wird sie ihn weder durchdringen noch berühren, so ist die Aufgabe nicht möglich. Dieß ist dann der Fall, wann die gegebene Höhe größer, als die halbe Hypotenuse ist.

Zweite Auflösung.

Analysis. Die vorgelegte Aufgabe löset sich auf eine andere Weise, wenn man berücksichtigt, daß die von der Spitze

des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Höhe die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse ist.

Nimmt man die Höhe h, die Hypotenuse H, den einen Abschnitt x, so ist der andere H — x und hieraus fließt folgende Gleichung $(H - x)\,x = h^2$

oder $Hx - x^2 = h^2$

Werden die Zeichen dieser Gleichung verändert, so gewinnt man $x^2 - Hx = -h^2$

oder $(x - \frac{1}{2}H)^2 = \frac{1}{4}H^2 - h^2$

und hieraus durch Wurzelausziehen

oder $x = \frac{1}{2}H \pm \sqrt{\frac{1}{4}H^2 - h^2}$

Da vor dem Wurzelzeichen das positive, oder negative Zeichen stehen kann, so fragt es sich welches stehen müsse? Diese Frage entscheidet sich nach der Anmerkung zur ersten Auflösung leicht, wenn man berücksichtigt, daß der Auffallpunkt D der Höhe AD die Hypotenuse BC entweder in ungleiche, oder gleiche Theile theilen wird. Theilt er sie in ungleiche Theile, so muß der größere größer, der kleinere aber kleiner als die Hälfte der Hypotennse seyn. Daher gewinnt man für den größern Abschnitt folgende Gleichung

$$x = \frac{1}{2}H + \sqrt{\frac{1}{4}H^2 - h^2}$$

für den kleineren folgende

$$x = \frac{1}{2}H - \sqrt{\frac{1}{4}H^2 - h^2}$$

Construction. Fig. 123. Es sey die Hypotenuse H = AB, die Höhe h = ME. Man halbire die Hypotenuse und errichte in ihrem Mittelpunkte M die gegebene Höhe ME und beschreibe von E aus mit ED = $\frac{1}{2}$BC einen Bogen, welche die Hypotenuse in einem Punkte D durchschneiden wird. Errichte in diesem Punkte gleichfalls die gegebene Höhe AD = ME und verbinde den Endpunkt A dieser Linie mit den beiden Endpunkten B und C der Hypotenuse durch gerade Linien, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Da DE = $\frac{1}{2}$H und EM = h, und das Dreieck EDM ein rechtwinkliges Dreieck ist, worin ED die

Hypotenuse und EM die Kathete ist, so gewinnt man nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$DM = \sqrt{\tfrac{1}{4}H^2 - h^2}$$

ferner ist $BD = BM - DM$

also $$BD = \tfrac{1}{2}H - \sqrt{\tfrac{1}{4}H^2 - h^2}.$$

Demnach ist BD der gesuchte Abschnitt. Wird nun DA senkrecht errichtet und AM gezogen, so sind die beiden Dreiecke ADM und DME congruent, folglich $AM = ED = BM$; und demnach ist der Winkel bei A, dessen Spitze über die Linie und in den Endpunkt der halben Linie BC fällt, und mit seinen Schenkeln auf den Endpunkten dieser Linie aufsteht, nach §. 58, 3. ein Rechter. Das Dreieck ABC ist also ein rechtwinkliges und hat die gegebene Höhe und Hypotenuse.

Eine andere Construction gewinnt man, Fig. 124., wenn man wie vorhin verfährt, das Dreieck DEM construirt, dann über BC einen Halbkreis, und von D aus mit $DA = ME$ einen Kreisbogen beschreibt, welcher den Halbkreis durchschneidet, und von diesem Durchschnittspunkte A aus das Dreieck ABC vollendet; das Dreieck BAC ist alsdann rechtwinklig und hat die gegebenen Linien.

Anmerkung. Auch aus den hier mitgetheilten Gleichungen lassen sich die Bemerkungen, die in der Anmerkung zur ersten Auflösung mitgetheilt wurden, ableiten. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ wird. Dieß geschieht, wann h, die Höhe, größer werden sollte, als $\frac{1}{2}H$ die Hälfte der Hypotenuse. Es ist nur ein Dreieck möglich, wann $\frac{1}{2}H = h$ wird, denn die obige Gleichung geht dann in folgende über

$$x = \tfrac{1}{2}H - \sqrt{\tfrac{1}{4}H^2 - \tfrac{1}{4}H^2} = \tfrac{1}{2}H - o = \tfrac{1}{2}H.$$

§. 116.

Aufgabe. Es sind die beiden Abschnitte der Hypotenuse gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 122.

Erste Auflösung. Der kleinere Abschnitt sey BD, der größere DC. Man setze beide Abschnitte in gerader Linie BDC aneinander, halbire die daraus entstandene Linie BC und be-

schreibe über ihr einen Halbkreis BAC; errichte in dem Vereinigungspunkte D eine senkrechte Linie DA bis zum Durchschnitt A der Kreislinie, und ziehe von diesem Punkte die Linien AB und AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Jeder Winkel über der Linie BC, dessen Spitze in einem Punkte des Halbkreises A liegt, ist ein Rechter, also ist der Winkel BAC in dem Dreiecke BAC ein Rechter, und das Dreieck selbst rechtwinklig. Die Linie DA steht in dem Vereinigungspunkte D der beiden Abschnitte senkrecht und geht durch die Spitze des Winkels; also entspricht das Dreieck ABC den gegebenen Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Berücksichtigt man, daß die Linie DA, welche in dem Vereinigungspunkte der beiden Abschnitte BD und DC senkrecht aufsteht, zugleich durch die Spitze des rechten Winkels BAC geht, und daß ihre Größe die Gestalt des rechtwinkligen Dreiecks bestimmt, so hat man nur nöthig diese Linie zu bestimmen, um das Dreieck zu bilden. Da nun diese Linie die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse ist, so hat man, wenn man sie mit x und die beiden Abschnitte mit a und A bezeichnet, folgende Gleichung

$$x = \sqrt{a \cdot A}$$

Diese Gleichung bestimmt den algebraischen Werth der gesuchten Linie. Die Construction dieser Formel fällt mit obiger Auflösung zusammen.

§. 117.

Aufgabe. Es ist die Höhe und einer der Abschnitte der Hypotenuse gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 123.

Erste Auflösung. Die Höhe sey AD, der eine Abschnitt DC. Man bilde aus beiden Linien, als Katheten, nach §. 74., das rechtwinklige Dreieck ADC, verlängere CD und errichte in dem Punkte A der Linie AC die Linie AB senkrecht bis zum Durchschnitte B der Verlängerung von CD, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Der Beweis führt sich leicht.

Zweite Auflösung. Da die Höhe die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse ist, so hat man, wenn die Höhe h, der eine Abschnitt A, der andere x genannt wird, folgende Gleichung

$$A \cdot x = h^2$$

und hieraus 1) $x = \frac{h^2}{A}$

für die Hypotenuse, welche die Summe der beiden Abschnitte ist, folgende

2) $H = A + x = A + \frac{h^2}{A} = \frac{A^2 + h^2}{A}$

für die größere Kathete folgende

3) $K = \sqrt{h^2 + A^2}$

für die kleinere folgende

4) $k = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{h^2 + \frac{h^4}{A^2}} = h \sqrt{\frac{A^2 + h^2}{A^2}} =$

$$= \frac{h}{A} \sqrt{A^2 + h^2}$$

Nach jeder dieser Formel läßt sich in Verbindung mit den gegebenen Stücken das rechtwinklige Dreieck bilden, und mittelbar durch sie jede einzelne Linie des rechtwinkligen Dreiecks.

Die erste Auflösung ist die einfachste Construction für diese Formeln.

§. 118.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der beiden Abschnitte und die Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 125.

Auflösung. Die Höhe sey AD, der Unterschied DE. Man errichte an dem einen Endpunkte D der Unterschiedslinie die Höhe DA senkrecht, halbire den Unterschied und verbinde den Mittelpunkt M mit dem Endpunkte A der Höhe durch die Linie MA, beschreibe mit MA, als Radius, einen Kreisbogen BAC, verlängere den Unterschied DE auf beiden Seiten bis zu den Durchschnitten B und C mit dem Kreisbogen, und ziehe AB und AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Vermöge der Construction ist der Winkel BAC ein Rechter, also ist BAC ein rechtwinkliges Dreieck, und hat, da AD senkrecht auf BC steht, die Linie AD als Höhe; ferner ist nach der Construction die Linie MD = ME und MB = MC, also auch $MB - EM = MC - MD$

oder $BE = DC$

Hieraus folgt, daß

$$DE = DB - BE = DB - CD$$

ist. Da nun DC der eine und BD der andere Abschnitt ist, so ergibt sich, daß der Abschnitt BD um die Linie DE größer, als der andere Abschnitt ist, und daß also das Dreieck BAC die aufgestellten Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Zweite Auflösung.

Analysis. Nennt man die Höhe h, den Unterschied der Abschnitte d, den kleinern Abschnitt x, so ist der größere x + d. Dieß führt, da die Höhe die mittlere geometrische Proportionale zwischen beiden Abschniten ist, zu folgender Gleichung

$$h^2 = x(x + d) = x^2 + xd$$

oder $$(x + \tfrac{1}{2}d)^2 = h^2 + \tfrac{1}{4}d^2$$

und hieraus gewinnt man folgende Bestimmungen: für den kleinern Abschnitt

1) $$a = x = \sqrt{h^2 + \tfrac{1}{4}d^2} - \tfrac{1}{2}d$$

für den größern Abschnitt

2) $$A = x + d = \sqrt{h^2 + \tfrac{1}{4}d^2} + \tfrac{1}{2}d$$

für die Hypotenuse

3) $$H = 2x + d = 2\sqrt{h^2 + \tfrac{1}{4}d^2} = \sqrt{4h^2 + d^2}$$

für die kleinere Kathete

4) $$k = \sqrt{H.x} = \sqrt{2h^2 + \tfrac{1}{2}d^2 - d\sqrt{(h^2 + \tfrac{1}{4}d^2)}}$$

für die größere Kathete

5) $$K = \sqrt{H(x+d)} = \sqrt{2h^2 + \tfrac{1}{2}d^2 + d\sqrt{(h^2 + \tfrac{1}{4}d^2)}}$$

Aus der Gleichung 3 fließt folgende sehr einfache Construction, wenn man die Höhe BC, und den Unterschied der Abschnitte AB nennt. Fig. 126.

Man trage die doppelte Höhe 2 BC = BD und die Linie AB unter einem rechten Winkel aneinander und suche zu beiden

die Hypotenuse AD, so ist dieß die Hypotenuse des zu suchenden Dreiecks.

Nun construire man das rechtwinklige Dreieck, entweder nach §. 115. aus der Hypotenuse und Höhe, oder man halbire die Hypotenuse AD und den gegebenen Unterschied AB, schneide vom Mittelpunkt der Hypotenuse den halben Unterschied $\frac{1}{2}$ AC = ME ab, errichte in E die Linie BC = EC senkrecht und vollende das Dreieck ACD, so ist dieß das Gesuchte.

§. 119.

Aufgabe. Es ist die Höhe und die eine Kathete gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 123.

Erste Auflösung. Die Höhe sey AD, die Kathete AB. Man bilde aus der Kathete, als Hypotenuse und der Höhe, als Kathete, nach §. 75. das rechtwinklige Dreieck ABD, verlängere BD und errichte in dem Punkte A, der Kathete BA, eine Linie AC senkrecht bis zum Durchschnitte C der Verlängerung von BD, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Zweite Auflösung. Nennt man die Kathete k, die Höhe h, den dieser Kathete anliegenden Abschnitt x, so hat man unter diesen Linien nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

1) $x = \sqrt{k^2 - h^2}$.

Nennt man den zweiten Abschnitt der Hypotenuse y, so hat man zwischen der Höhe und den beiden Abschnitten folgende

$$x \cdot y = h^2.$$

Wird statt x sein Werth hier eingeführt, so hat man

$$y \cdot \sqrt{k^2 - h^2} = h^2$$

und hieraus für den zweiten Abschnitt

2) $y = \frac{h^2}{\sqrt{(k^2 - h^2)}}$

Da die Summe der beiden Abschnitte der Hypotenuse gleich kommt, so ist $H = x + y = \sqrt{k^2 - h^2} + \frac{h^2}{\sqrt{(k^2 - h^2)}}$

also 3) $H = \frac{k^2 - h^2 + h^2}{\sqrt{(k^2 - h^2)}} = \frac{k^2}{\sqrt{(k^2 - h^2)}}$

Die zweite Kathete bestimmt sich durch die Hypotenuse und die gegebene Kathete und es wird

$$K^2 = H^2 - k^2 = \frac{k^4}{k^2 - h^2} - k^2 = \frac{k^2 \cdot h^2}{k^2 - h^2}$$

und hieraus

4) $K = \sqrt{\frac{k^2 \cdot h^2}{k^2 - h^2}} = \frac{k \cdot h}{\sqrt{(k^2 - h^2)}}$

Die obige Auflösung ist die einfachste Construction für diese Gleichungen.

§. 120.

Aufgabe. Es ist ein Abschnitt und die ihm anliegende Kathete gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 123.

Erste Auflösung. Der Abschnitt sey BD, die Kathete AB. Man bilde aus der Linie AB, als Hypotenuse und dem Abschnitte, als Kathete, das rechtwinklige Dreieck ABD, verlängere BD und errichte in dem Endpunkt A die Linie AC senkrecht bis zum Durchschnitte C der Verlängerung von BD, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Zweite Auflösung. Nennt man den Abschnitt a, die anliegende Kathete k, so bestimmt sich die Höhe des Dreiecks durch folgende Gleichung

1) $h = \sqrt{k^2 - a^2}$

Der zweite Abschnitt A, welcher die dritte geometrische Proportionale zum ersten und zu der Höhe ist, durch folgende

2) $A = \frac{k^2 - a^2}{a}$

Die Hypotenuse, als die Summe beider Abschnitte, durch folgende

3) $H = a + \frac{k^2 - a^2}{a} = \frac{k^2}{a}$

Die zweite Kathete durch folgende

$$4)\quad K = \sqrt{H^2 - k^2} = \frac{k}{a}\sqrt{k^2 - a^2}$$

Die obige Auflösung ist die einfachste Construction für dieses Problem.

§. 121.

Aufgabe. Es ist die Kathete und der an der andern Kathete liegende Abschnitt der Hypotenuse gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 127.

Auflösung. Die Kathete sey A'D und der an der andern Kathete liegende Abschnitt BD. Man errichte an dem Endpunkte D des gegebenen Abschnittes die gegebene Kathete DA' senkrecht, halbire den Abschnitt, verbinde seinen Mittelpunkt mit dem Endpunkte A' der Kathete und beschreibe mit der Linie M'A' als Radius einen Halbkreis B'A'C, verlängere die Linie BD auf beiden Seiten bis zu ihren Durchschnitten B' und C mit dem Halbkreis B'A'C, beschreibe über der Linie BC einen zweiten Halbkreis BAC, und ziehe von dem Durchschnitte A der senkrechten DA mit der Peripherie die Linien AB und AC; so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist M'D = M'B, ferner M'A' = M'C = M'B', als Radien des Halbkreises B'A'C. Zieht man nun Gleiches von Gleichem ab, so bleibt Gleiches und man erhält

$$M'B' - M'B = MC - M'D$$

oder

$$B'B = DC \text{ und also auch}$$

$$B'D = B'B + BD$$

$$= DC + BD = BC$$

Die Linie A'D steht senkrecht auf dem Durchmesser B'C auf. Hieraus folgt die Gleichung

$$A'D^2 = B'D \,.\, DC$$

oder, da

$$B'D = BC \text{ ist,}$$

$$1)\quad A'D^2 = BC \,.\, DC$$

das Dreieck BAC ist wegen des Winkels BAC rechtwinklig.

Hieraus folgt die Gleichung

$$AC^2 = BC^2 - BA^2$$

Die Hypotenuse BC läßt sich in die Abschnitte BD und DC zerlegen. Es ist also $BC = BD + DC$

führt man diesen Werth in obige Gleichung ein, so geht sie in folgende über $AC^2 = BC\,(BD + DC) - BA^2$

$$= BC \,.\, BD + BC \,.\, DC - BA^2$$

Das Quadrat der Kathete BA läßt sich, da sie die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem ihr anliegenden Abschnitte ist, durch diese beiden Linien darstellen und es ist $BA^2 = BC \,.\, BD$

Setzt man diesen Werth in die vorige Gleichung ein, so entsteht

2) $AC^2 = BC \,.\, BD + BC \,.\, DC - BC \,.\, BD$

$$= BC \,.\, DC$$

Die Vereinigung der Gleichungen 1 und 2 führt zu folgender

$$A'D^2 = AC^2 \text{ oder } AD = AC$$

Die Kathete AC in dem Dreiecke BAC ist der gegebenen Linie gleich; ferner enthält dasselbe den gegebenen nicht anliegenden Abschnitt und ist rechtwinklig. Die Anforderungen der Aufgabe sind also erfüllt.

Zweite Auflösung. Nennt man die gegebene Kathete K, den nicht anliegenden Abschnitt A, den anliegenden x, so ist die Hypotenuse $x + A$. Da die gegebene Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt ist, so hat man folgende Gleichung

$$k^2 = (x + A)\,x = x^2 + Ax$$

oder $k^2 + \frac{1}{4}A^2 = (x + \frac{1}{2}A)^2$

und hieraus für den anliegenden Abschnitt

1) $x = \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}A^2} - \frac{1}{2}A$

für die Hypotenuse

2) $H = x + A = \frac{1}{2}A + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}A^2}$

für die Höhe, als die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten

3) $h = \sqrt{x \,.\, A} = \sqrt{A \,.\, \sqrt{(k^2 + \frac{1}{4}A^2)} - \frac{1}{2}A^2}$

für die zweite Kathete, als die mittlere Proportionale zwischen dem gegebenen Abschnitt und der Hypotenuse

4) $K = \sqrt{A \,.\, H} = \sqrt{(\frac{1}{2}A^2 + A\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}A^2})}$

Construction nach der Gleichnng 2. Fig. 128. Man bilde aus der gegebenen Kathete $k = A'D = FE$ und dem halben Abschnitt $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}BD = EB$ als Katheten, das rechtwinklige Dreieck BEF, verlängere die Hypotenuse BF um $FC = \frac{1}{2}A$, so ist diese Linie die gesuchte Hypotenuse. Aus ihr und der gegebenen Kathete $A'D = AB$ läßt sich leicht nach §. 75. das rechtwinklige Dreieck BAC bilden, welches das gesuchte ist.

Scheidet man von BF die Linie $DF = \frac{1}{2}A$ ab, so hat man die beiden Abschnitte BD und DC; aus BD und $BA = A'D$ läßt sich leicht das Dreieck ABD bilden und hieraus dann das Dreieck ABC auch nach §. 120. vollenden.

Der Beweis für die Richtigkeit obiger Construction führt sich leicht.

Anmerkung. Die Bemerkungen zu der ersten Auflösung führen zu folgendem Satze: Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken die kleinern Abschnitte einander, und der Größere im Größern, der Hypotenuse im Kleinern gleich ist, so ist die Höhe des Größern, der kleinern Kathete des Kleinern gleich; ferner ist das Summenquadrat der Hypotenuse und kleinern Kathete im Kleinern, dem Quadrat der größern Kathete im Größern gleich.

§. 122.

Aufgabe. Es ist die kleinere Kathete und der Unterschied der beiden Abschnitte gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 129.

Auflösung Nennt man den Unterschied der Abschnitte d, die kleinere Kathete k, den ihr anliegenden Abschnitt x, so ist der größere Abschnitte $x + d$, die Hypotenuse, als die Summe beider Abschnitte, $2x + d$.

Berücksichtigt man nun, daß die Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte ist, so fließt hieraus folgende Gleichung

$$k^2 = x(2x + d) = 2x^2 + dx$$

$$x^2 + \tfrac{1}{2}dx = \tfrac{1}{2}k^2 \text{ oder } (x + \tfrac{1}{4}d)^2 = k^2 + \tfrac{1}{16}d^2$$

und hieraus bestimmt sich der anliegende Abschnitt

1) $x = \sqrt{\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}d^2} - \frac{1}{4}d$

der größere Abschnitt

2) $A = x + d = \sqrt{\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}d^2} + \frac{3}{4}d$

die Hypotenuse, als die Summe beider Abschnitte

3) $H = 2x + d = 2\sqrt{\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}d^2} + \frac{1}{2}d$
$= \sqrt{2k^2 + \frac{1}{4}d^2} + \frac{1}{2}d.$

Die Höhe als mittlere Proportionale zwischen beiden Abschnitten

4) $h = \sqrt{x(x+d)} = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}d^2 - \frac{3}{16}d^2 +$
$\frac{1}{4}d\sqrt{\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}d^2} = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{8}d^2 + \frac{1}{4}d\sqrt{\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}d^2}$

Die größere Kathete

5) $K = \sqrt{A.H} = \sqrt{k^2 + \frac{1}{2}d^2 + 2d\sqrt{(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}d^2)}}$

Construction nach den Gleichungen 1 und 2. Man bilde aus $BE = EF = \frac{1}{2}k$ das rechtwinklige Dreieck BEF, errichte in dem Endpunkte F der Hypotenuse BF die Linie FG $= \frac{1}{4}d$ senkrecht und ziehe durch die Punkte B und G eine unbestimmte Linie, schneide von GB die Linie $GD = \frac{1}{4}d$ ab, so ist BD der gesuchte kleinere Abschnitt. Trägt man von D aus den gegebenen Unterschied $d = DH$ und den Abschnitt $BD = HC$ an, so ist DC der größere Abschnitt, BD der kleinere, BC die Hypotenuse. Aus diesen Linien und der Kathete $k = AB$ läßt sich nun entweder nach §. 116. oder §. 75. das rechtwinklige Dreieck BAC bilden, welches das gesuchte ist.

Beweis. $BF = \sqrt{\frac{1}{2}k^2}$, $BG = \sqrt{\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}d^2}$, $DG = \frac{1}{4}d$, also ist $BD = BG - DG =$
$= \sqrt{\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}d^2} - \frac{1}{4}d$ und $DC = GH +$
$HC = \sqrt{\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{16}d^2} + \frac{3}{4}d.$

Anmerkung. Ist die größere Kathete und der Unterschied der beiden Abschnitte gegeben, so läßt sich leicht durch eine ähnliche Analysis das rechtwinklige Dreieck bestimmen.

§. 123.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und die Summe

der beyden Katheten gegeben. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 130.

Erste Auflösung. Die Hypotenuse sey AB, die Summe der beiden Katheten AD. Man lege an einen der Endpunkte D der gegebenen Summe AD die Hälfte eines rechten Winkels so an, daß der eine Schenkel auf die Linie AD falle und der andere DE unbestimmt verlängert werde. Aus dem andern Endpunkt A beschreibe man mit der Hypotenuse AB einen Kreisbogen, welcher den Schenkel DE in einem Punkte B schneidet, fälle von diesem Durchschnittspunkte B auf AD die senkrechte Linie BC, so hat das hiedurch entstandene Dreieck ABC die verlangten Eigenschaften.

Beweis. Da der Winkel ADB die Hälfte eines rechten, und der Winkel bei C ein rechter ist, so ist auch der Winkel CBD die Hälfte eines rechten und dem Winkel ADB gleich; also das Dreieck BCD ein gleichschenkliges Dreieck und die Linie BC der Linie CD gleich. Nun ist die Summe der Linie AC und BC der Linie AD, also der Summe der beiden Katheten gleich. Beide umschließen einen rechten Winkel, folglich ist das Dreieck ABC ein rechtwinkliges Dreieck, worin die Summe der beiden Katheten der Linie AD und die Hypotenuse der Linie AB gleich ist.

Zweite Auflösung. Fig. 131. Ueber der Hypotenuse AB beschreibe man nach § 58. den Bogen ADC, welcher die Hälfte eines rechten Winkels faßt. Alsdann beschreibe man aus dem Endpunkte B der Linie AB mit AD der Summe der beiden Katheten als Halbmesser den Bogen DD', welcher den ersten Bogen durchschneiden wird, ziehe die geraden Linien DB, AD, D'B, D'A, und trage an dem Punkte A die halben rechten Winkel DAC und D'AC' so an, daß immer einer ihrer Schenkel in die Linien AD und AD' falle, so thut jedes der Dreieck AC'B und ACB den Bedingungen ein Genüge.

Beweis. Jeder von den Winkeln ADB und DAC ist vermöge der Construction der Hälfte eines rechten gleich, also sind sie zusammen einem rechten gleich, folglich der Winkel DCA und ACB ein rechter und das Dreieck ACB ein recht-

winkliges. Da nun in dem Dreiecke ADC die an der Linie AD liegenden Winkel ADC und DAC einander gleich sind, so ist das Dreieck selbst ein gleichschenkliges und die Seiten AC und DC einander gleich. Nun ist aber die Linie BD der Summe der beiden Katheten gleich, also sind auch die beiden Linien BC und CA der gegebenen Summe gleich, sie selbst aber, da sie den rechten Winkel des Dreiecks ACB einschließen, die Katheten dieses Dreiecks. Demnach entspricht das, auf die angegebene Art gebildete, Dreieck den Forderungen der Aufgabe.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß das Dreieck AC'B den aufgestellten Bedingungen genüget.

Dritte Auflösung. Nennt man die Hypotenuse H, die Summe der beiden Katheten S, ihre Differenz x, so läßt sich die größere Kathete, als die Hälfte der Summe und Differenz der beiden Katheten, auf folgende Art bezeichnen

$$K = \tfrac{1}{2}(S + x)$$

die kleinere, als die Hälfte des Unterschiedes der Summe und Differenz beider $k = \tfrac{1}{2}(S - x)$

und hieraus fließt nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung $H^2 = (\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}x)^2 + (\tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}x)^2$

Werden die beiden Quadrate auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens entwickelt, so entsteht

$$H^2 = \tfrac{1}{4}S^2 + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}S^2 + \tfrac{1}{4}x = \tfrac{1}{2}S^2 + \tfrac{1}{2}x^2$$

und hieraus $x = \sqrt{2H^2 \cdot S^{-2}}$

Wird von dieser Gleichung die Hälfte genommen, und die Hälfte der Summe der beiden Katheten zugezählt, so entsteht die größere Kathete, und man gewinnt folgende Gleichung

$$K = \tfrac{1}{2}(S + x) = \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}\sqrt{(2H^2 - S^2)}$$

oder $K = \tfrac{1}{2}S + \sqrt{(\tfrac{1}{2}H^2 - \tfrac{1}{4}S^2)}$

für die kleinere folgende

$$k = \tfrac{1}{2}S - \sqrt{(\tfrac{1}{2}H^2 - \tfrac{1}{4}S^2)}$$

Construction. Fig. 132. Es sey die Hypotenuse H = AB, S = DE. Man halbire die Hypotenuse, setze ihre Hälfte AC unter einem rechten Winkel aneinander, ziehe die Hypotenuse AE, beschreibe über der Hypotenuse AE einen Halbkreis und trage von dem einen Endpunkte der Hypotenuse AE, die Hälfte der Summe $\frac{1}{2}S$ = EF in diesen Kreis, vollende das

Dreieck EFA und verlängere die Kathete FE um FA, wodurch die Linie ED entsteht. Auf dem einen Endpunkte D der so gefundenen Linie DE errichte man eine unbestimmte senkrechte Linie, und von dem andern E trage man die Hypotenuse AB = EG so an, daß ihr Endpunkt in die senkrechte Linie falle so ist das Dreieck DGE das gesuchte Dreieck.

§. 124.

Bemerkungen zu §. 123. Fig. 130.

Die Darstellung der, unter den in der Aufgabe des §. 123 gegebenen Bedingungen zu bildenden, Dreiecke hängt, wie man sich leicht überzeugt, von den Durchschnittspunkten ab, welche die, unter dem Winkel BDA = $\frac{1}{2}$R angelegte, Linie mit dem Kreisbogen FB'BC, dessen Radius die gegebene Hypotenuse ist, macht. Es werden zwei Dreiecke ABC und AB'C', die aber congruent sind, entstehen, wenn die Linie DBB' den Bogen durchschneidet. Es wird nur eines entstehen, wenn diese Linie den gezogenen Bogen berührt. Die Aufgabe wird unmöglich, sobald die Linie DBB' den Bogen weder durchschneidet, noch berührt, d. h. wenn die Hypotenuse größer, als die Summe der beiden Katheten ist, oder wenn sie so klein ist, daß der mit ihr als Radius gezogene Bogen die Linie DBB' nicht berührt.

Die oben gefundene Formel für die Kathete bestimmt für den zweiten Fall die Möglichkeit der Aufgabe genau. Die Aufgabe wird so lange möglich seyn, als der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in der Gleichung

$$H = \tfrac{1}{2}S + \sqrt{\tfrac{2}{4}H^2 - \tfrac{1}{4}S^2}$$

eine positive Größe; unmöglich, wenn sie eine negative Größe liefert. Die kleinste Ausdehnung der Hypotenuse wird also dann statt finden, wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen o wird. Setzt man also den Werth dieses Ausdrucks der Nulle gleich, so kann man hieraus die weitern Bedingungen ableiten, und es wird $\sqrt{(\frac{2}{4}H^2 - \frac{1}{4}S^2)} = o$,

oder $2H^2 = S^2$, oder $H^2 = \frac{1}{2}S^2 = \frac{1}{4}S^2 + \frac{1}{4}S^2$.

Also dann wird die Hypotenuse die kleinste Ausdehnung haben, wenn ihr Quadrat dem doppelten Quadrate der halben Katheten-

Summe

Summe gleich ist, oder wenn die Katheten einander gleich sind; wie aus obiger Formel erhellt, denn wird der fragliche Ausdruck gleich Null gesetzt, so geht sie in folgende über

$$K = \tfrac{1}{2}S.$$

Der Beweis, daß die beiden obengenannten Dreiecke ABC und AB'C' Fig. 130. congruent sind, führt sich auf folgende Weise: Die Linien BC und B'C' stehen auf AD senkrecht, also sind die Winkel bei C und C' Rechte, und die Dreiecke rechtwinklig. Die Dreiecke BCD und B'C'D sind, wegen der rechten Winkel bei C und C' und des Winkels CDB $= \tfrac{1}{2}$R rechtwinklig-gleichschenklige, also ist der Winkel CBD $=$ C'B'D $=$ CDB $= \tfrac{1}{2}$R.

Die Linie AB und AB' sind, als Radien einander gleich, folglich ist das Dreieck ABB' gleichschenklig und der Winkel ABB' $=$ AB'B.

Der Winkel ABB' bildet zu dem Dreiecke ABD den äussern, und ist also den beiden im Dreiecke gegenüberstehenden Winkeln gleich. Demnach ist

$$\text{ABB}' = \text{BDA} + \text{DAB}$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{R} + \text{DAB}$$

Der Winkel AB'B besteht aus den Winkeln AB'C' und C'B'D und C'B'D $= \tfrac{1}{2}$R, also ist auch

$$\text{AB}'\text{B} = \tfrac{1}{2}\text{R} + \text{AB}'\text{C}'$$

Da aber die Winkel AB'B und ABB' einander gleich sind, so ist auch $\tfrac{1}{2}$R + AB'C' $= \tfrac{1}{2}$R + DAB
oder der Winkel AB'C' $=$ DAB.

In den rechtwinkligen Dreiecken AB'C' und ABC ist die Hypotenuse und ein anliegender spitzer Winkel einander gleich, also folgt hieraus die Congruenz der Dreiecke. Hieran schließt sich die weitere Bemerkung, daß zwei rechtwinklige Dreiecke einander gleich sind, wenn sie gleiche Hypotenuse und Katheten-Summe haben.

Ebenso läßt es sich Fig. 131. beweisen, daß die Dreiecke ACB und AC'B congruent sind. Man verlängere AC bis zum Durchschnitte F der Peripherie.

Der Winkel DCA ist $=$ R, also auch sein Scheitelwinkel BCF $=$ R. Der Winkel DAC $=$ ADC $= \tfrac{1}{2}$R, also ist das

Dreieck ACD gleichschenklig und AC = CD. Der Winkel AFB = ½ R, da er ein Peripherie-Winkel über der Linie AB ist; also ist auch wegen des rechten Winkels bei C das Dreieck BCF ein gleichschenkliges Dreieck und BC = CF. Hieraus folgt, daß

$$AC + CF = DC + CB$$

oder

$$AF = BD$$

Da aber BD = BD′ ist, so ist auch BD′ = AF. Hieraus folgt die Congruenz der Dreiecke AD′B und AFB und die Gleichheit der Winkel ABC′ und BAC. Nun haben die rechtwinklige Dreiecke AC′B und ACB die Hypotenuse und einen spitzen Winkel gemein, also sind sie congruent.

§. 125.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und die Summe der einen Kathete und des anliegenden Abschnittes gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 133. Die Hypotenuse sey BC, die Summe der Kathete und des anliegenden Abschnittes BE. Man lege die beiden Linien in gerader Richtung aneinander, und suche zu beiden die mittlere geometrische Proportionale BG, beschreibe über der Hypotenuse BC einen Halbkreis und verbinde ihren Mittelpunkt M mit dem Endpunkte der Linie B durch die Linie MG, schneide die Linie MG = MF auf ME ab, und trage BF in den Halbkreis der Hypotenuse BAC, ziehe von ihrem Durchschnitte A die Linien AB und AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreiecke.

Beweis. Vermöge der Construction ist die Linie GM = FM, ferner das Dreieck GBM rechtwinklig und GB die mittlere Proportionale zwischen EB und BC. Hieraus fließen folgende Gleichungen

1) $GB^2 = EB \cdot BC$

2) $GB^2 = GM^2 - BM^2 = FM^2 - BM^2$

da aber FM = FB + BM ist, so ist auch

$$FM^2 = FB^2 + 2BM \cdot BF + BM^2$$

Wird dieſer Werth für FM^2 in obige Gleichung eingeführt und berückſichtigt, daß $2BM = BM + MC = BC$ iſt, ſo geht die Gleichung 2 in folgende über

3) $GB^2 = FB^2 + BC \cdot BF = (FB + BC)\,FB$
$= FC \cdot FB$

Die Vereinigung der Gleichungen 1 und 3 führt zu folgender

$$EB \cdot BC = FC \cdot FB$$

und die Gleichheit beider Produkte führt zu folgender Proportion

$$EB : BF = FC : BC$$

der Unterſchied der beiden Verhältniß-Glieder aber zu folgender

$$EB - BF : FC - BC = BF : BC$$

oder, da $EB - BF = EF$ und $FC - BC = FB$ iſt,

$$EB : FB = FB : BC$$

Da nun nach der Conſtruction $BA = FB$, ſo gewinnt man hieraus durch Umkehrung folgende Proportion

4) $BC : BA = BA : EF$

Die Linie BC iſt die Hypotenuſe und BA die Kathete im rechtwinkligen Dreiecke BAC, und dieſe Bemerkung führt, wenn man von A die ſenkrechte Linie AD auf die Hypotenuſe fällt, zu folgender Proportion

5) $BC : BA = BA : BD$

Aus der Vergleichung beider Proportionen folgt die Gleichheit der Linien EF und BD. Es iſt alſo in dem Dreiecke BAC

$$BD + BA = BF + FB = BE.$$

Das Dreieck BAC erfüllt alſo die Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflöſung. Nennt man die Hypotenuſe H, die Summe der Kathete und des anliegenden Abſchnittes S, den Abſchnitt x, ſo iſt die Kathete $S - x$. Da nun die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks die mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen der Hypotenuſe und dem ihr anliegenden Abſchnitt iſt, ſo hat man folgende Gleichung

$$(S - x)^2 = H \cdot x$$

oder durch Entwicklung

$$S^2 - 2Sx + x^2 = Hx$$

und hieraus $x^2 - (2S + H)x = -S^2$

oder $[x - (S + \frac{1}{2}H)]^2 = (S + \frac{1}{2}H)^2 - S^2$

und hieraus $x = S + \frac{1}{2}H \pm \sqrt{(S + \frac{1}{2}H)^2 - S^2}$

Die Frage, ob der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen das positive oder negative Zeichen haben müsse, beantwortet sich leicht, wenn man berücksichtigt, daß der Abschnitt immer kleiner, als die Summe seiner selbst und der Kathete und der halben Hypotenuse seyn müsse. Er muß daher mit dem negativen Zeichen versehen seyn. Dieß führt zu folgender Gleichung für den Abschnitt

1) $x = S + \frac{1}{2}H - \sqrt{(S + \frac{1}{2}H)^2 - S^2}$

für die anliegende Kathete

2) $k = S - x = \sqrt{(\frac{1}{2}H + S)^2 - S^2} - \frac{1}{2}H$

für den nicht anliegenden Abschnitt

3) $A = H - x = \frac{1}{2}H - S + \sqrt{(S + \frac{1}{2}H)^2 - S^2}$

für die Höhe

4) $h = \sqrt{k^2 - x^2}$

$= \sqrt{[\frac{1}{4}H^2 - (S + \frac{1}{2}H)^2 + 2S\sqrt{(S + \frac{1}{2}H)^2 - S^2}]}$

für die nicht anliegende Kathete

5) $K = \sqrt{H \cdot A} = \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - HS + H\sqrt{[(S + \frac{1}{2}H)^2 - S^2]}}$

Aus Nro. 2. fließt folgende einfache Construction Fig. 134. Man beschreibe über der gegebenen Hypotenuse BC einen Halbkreis BAC, errichte in ihrem Mittelpunkte die Summe S = ME senkrecht und trage von E aus mit EF = $\frac{1}{2}$H + S einen Kreisbogen, der die verlängerte Hypotenuse in einem Punkte F schneidet, trage FB = AB als Sehne in den Kreisbogen und ziehe AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Die Richtigkeit dieser Construction ergibt sich aus folgendem: Es ist nach der Construction

$FM = \sqrt{FE^2 - EM^2} = \sqrt{(\frac{1}{2}H + S)^2 - S^2}$

ferner ist $BM = MC = \frac{1}{2}H$, also auch

$FB = FM - BM = FM - \frac{1}{2}H$,

und demnach ist, wenn man die gehörigen Werthe einführt

$FB = \sqrt{(\frac{1}{2}H + S)^2 - S^2} - \frac{1}{2}H$

also FB die gesuchte Kathete. Mit ihr und der Hypotenuse BC ist nach §. 75. das rechtwinklige Dreieck gebildet, welches also das gesuchte ist.

§. 126.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und die Summe der Quadrate der einen Kathete und des anliegenden Abschnittes gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 135.

Analysis. Nennt man die Hypotenuse H, die Summe der Quadrate der Kathete und des anliegenden Abschnittes S^2, den Abschnitt selbst x, so ist das Quadrat der anliegenden Kathete $S^2 - x^2$, die Kathete selbst aber $\sqrt{S^2 - x^2}$. Berücksichtigt man nun, daß die Kathete die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt ist, so gewinnt man folgende Proportion

$$x : \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{S^2 - x^2} : H$$

und hieraus folgende Gleichung

$$S^2 - x^2 = Hx \quad \text{oder} \quad x^2 + Hx = S^2$$

Wird auf beiden Seiten $(\frac{1}{2}H)$ zugezählt, so entsteht

$$(x + \tfrac{1}{2}H)^2 = S^2 + \tfrac{1}{4}H^2$$

und hieraus bestimmt sich der Abschnitt

1) $x = \sqrt{S^2 + \frac{1}{4}H^2} - \frac{1}{2}H$

die anliegende Kathete k

2) $k = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{H\sqrt{(S^2 + \frac{1}{4}H) - \frac{1}{2}H^2}}$

der nicht anliegende Abschnitt

3) $A = H - x = \frac{3}{4}H - \sqrt{S^2 + \frac{1}{4}H^2}$

die Höhe

4) $h = \sqrt{x(H - x)} = \sqrt{[2H\sqrt{(S^2 + \frac{1}{4}H^2) - (H^2 + S^2)}]}$

die nicht anliegende Kathete

5) $K = \sqrt{H(H + x)} = \sqrt{3(\frac{1}{2}H^2) - H\sqrt{(S^2 + \frac{1}{4}H^2}}$

die Gleichung 1 führt zu folgender einfachen

Construction. Die Hypotenuse H sey BC, die Seite des Summenquadrates S sey BG. Man errichte an dem einen Endpunkte B der Hypotenuse BC die Summenlinie BG senkrecht, halbire die Hypotenuse und beschreibe über ihr einen Halbkreis BFAC, ziehe von ihrem Mittelpunkte M nach dem Endpunkte G die Linie MG, so ist die Linie zwischen G und

Construction nach der Gleichnng 2. Fig. 128. Man bilde aus der gegebenen Kathete $k = A'D = FE$ und dem halben Abschnitt $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}BD = EB$ als Katheten, das rechtwinklige Dreieck BEF, verlängere die Hypotenuse BF um $FC = \frac{1}{2}A$, so ist diese Linie die gesuchte Hypotenuse. Aus ihr und der gegebenen Kathete $A'D = AB$ läßt sich leicht nach §. 75. das rechtwinklige Dreieck BAC bilden, welches das gesuchte ist.

Scheidet man von BF die Linie $DF = \frac{1}{2}A$ ab, so hat man die beiden Abschnitte BD und DC; aus BD und $BA = A'D$ läßt sich leicht das Dreieck ABD bilden und hieraus dann das Dreieck ABC auch nach §. 120. vollenden.

Der Beweis für die Richtigkeit obiger Construction führt sich leicht.

Anmerkung. Die Bemerkungen zu der ersten Auflösung führen zu folgendem Satze: Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken die kleinern Abschnitte einander, und der Größere im Größern, der Hypotenuse im Kleinern gleich ist, so ist die Höhe des Größern, der kleinern Kathete des Kleinern gleich; ferner ist das Summenquadrat der Hypotenuse und kleinern Kathete im Kleinern, dem Quadrat der größern Kathete im Größern gleich.

§. 122.

Aufgabe. Es ist die kleinere Kathete und der Unterschied der beiden Abschnitte gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 129.

Auflösung Nennt man den Unterschied der Abschnitte d, die kleinere Kathete k, den ihr anliegenden Abschnitt x, so ist der größere Abschnitte $x + d$, die Hypotenuse, als die Summe beider Abschnitte, $2x + d$.

Berücksichtigt man nun, daß die Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte ist, so fließt hieraus folgende Gleichung

$$k^2 = x(2x + d) = 2x^2 + dx$$

$$x^2 + \tfrac{1}{2}dx = \tfrac{1}{2}k^2 \text{ oder } (x + \tfrac{1}{4}d)^2 = k^2 + \tfrac{1}{16}d^2$$

$$BD + AD = BD + EF = BE$$

ist, und daß die Summe des kleinern Abschnittes BD und der Höhe AD im Dreieck BAC der gegebenen Summe BE gleich sind. Das Dreieck BAC hat ferner die gegebene Hypotenuse BC, ist wegen des Winkels BAC im Halbkreis rechtwinklig, und erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Nennt man die Hypotenuse H, die Summe der Höhe und des kleinern Abschnittes S, den kleinern Abschnitt selbst x, so ist die Höhe $S - x$ und der größere Abschnitt $H - x$, und hieraus gewinnt man, da die Höhe die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse ist, folgende Gleichung

$$x(H - x) = (S - x)^2$$

oder $\quad xH - x^2 = S^2 - 2Sx + x^2$

also $\quad x^2 - (S + \frac{1}{2}H)x = -\frac{1}{2}S^2$

oder $\quad [x - (\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H)]^2 = (\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H)^2 - \frac{1}{2}S^2$

und hieraus $\quad x = \frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H \pm \sqrt{(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H)^2 - \frac{1}{2}S^2}$

Es fragt sich nun: ob in der hier aufgefundenen Gleichung das Wurzelzeichen mit dem negativen oder positiven Zeichen versehen seyn müsse? Berücksichtigt man, daß der kleinere Abschnitt x immer kleiner als die Hälfte der Summe seiner selbst und der Höhe, und des vierten Theils der Hypotenuse seyn muß, so wird das Wurzelzeichen nur mit dem negativen Zeichen versehen seyn können. Hieraus fließt also folgende Gleichung für den kleinern Abschnitt

1) $x = \frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H - \sqrt{(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H)^2 - \frac{1}{2}S^2}$

für die Höhe

2) $h = S - x = \frac{1}{2}S - \frac{1}{4}H + \sqrt{(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H)^2 - \frac{1}{2}S^2}$

für den größern Abschnitt

3) $A = H - x = \frac{3}{4}H - \frac{1}{2}S + \sqrt{(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H)^2 - \frac{1}{2}S^2}$

für die kleinere Kathete

4) $k = \sqrt{H.x} = \sqrt{\frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}S.H - H\sqrt{[(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H)^2 - \frac{1}{2}S^2]}}$

für die größere Kathete

5) $K = \sqrt{H.A} = \sqrt{\frac{3}{4}H^2 - \frac{1}{2}SH + H\sqrt{[(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H)^2 - \frac{1}{2}S^2]}}$

Aus jeder dieser Formeln läßt sich eine neue Construction für die obige Aufgabe nach den Lehren des zweiten Kapitels auffinden.

§. 128.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und die Summe der Höhe und des größern Abschnittes gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 137.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC, die Summe der Höhe und des Abschnittes BE. Man beschreibe über der Hypotenuse BC einen Halbkreis, und trage auf BC die gegebene Summe BE an, deren Endpunkt E auf die Verlängerung von BC fallen wird, trage auf der Linie BE im Endpunkte E den Winkel $BEA = \frac{1}{2}R$ und verlängere den Schenkel EA bis zum Durchschnitte A des Halbkreises BAC, ziehe die Linien AB und AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Man fälle von dem Punkte A auf die Hypotenuse EC die Linie AD senkrecht, so ist das Dreieck ADC, wegen des Winkels bei D, rechtwinklig, und die Winkel DEA und DAE sind zusammen einem Rechten gleich. Da nun der Winkel bei $E = \frac{1}{2}R$ ist, so ist auch der Winkel $DAE = \frac{1}{2}R$ und folglich das Dreieck ADE gleichschenklig, also auch $AD = DE$. Hieraus folgt, daß

$$BD + AD = BD + DE = BE \text{ ist.}$$

Die Linie AD ist die Höhe in dem Dreieck ABC und BD ihr größerer Abschnitt; also ist die Summe der Höhe und des Abschnittes im Dreieck ABC der gegebenen Summe gleich.

Das Dreieck BAC ist, wegen des Winkels BAC, der mit seinen Schenkeln auf den Endpunkten des Durchmessers BC aufsteht und mit seiner Spitze in der Peripherie liegt, ein rechtwinkliges, hat die gegebene Linie BC als Hypotenuse und erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als die Linie EA den Halbkreis durchschneidet, oder berührt. Sie ist unmöglich, wenn sie ihn weder durchschneidet, noch berührt. Im Falle sie ihn durchschneidet, gibt es zwei Dreiecke ABC und A'BC, welche

der Aufgabe genügen. Hievon kann man sich leicht überzeugen, da sich alle die Sätze des oben mitgetheilten Beweises auch auf das Dreieck BA'C anwenden lassen, wie denn auch hierin

$$BD' + D'A' = BD' + D'E = BE$$

und das Dreieck AB'C ein rechtwinkliges ist.

Die Aufgabe ist also in diesem Falle unbestimmt. Sie ist bestimmt, wenn das Dreieck die größere oder kleinere Höhe, kleinern oder größern Abschnitt haben soll, sie ist ferner bestimmt, wenn die Linie EA den Halbkreis nur berührt, denn es ist alsdann nur ein Dreieck möglich.

Zweite Auflösung. Die nämliche Analysis wie in §. 127. zweite Auflösung, führt zu folgender Gleichung für den größern Abschnitt

1) $x = \frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H \pm \sqrt{(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H)^2 - \frac{1}{2}S^2}$

wobei nur zu berücksichtigen ist, daß vor dem Wurzelzeichen sowohl das positive als negative Zeichen stehen kann. Das positive erzeugt den größern Abschnitt und die kleinere Höhe, folglich das Dreieck BA'C; das negative den kleinern Abschnitt und die größere Höhe, folglich das größere Dreieck ABC. Die Gleichung für die Höhe ist

2) $h = S - x = \frac{1}{2}S - \frac{1}{4}H \mp \sqrt{(\frac{1}{2}S + H)^2 - \frac{1}{2}S^2}$

für den kleinern Abschnitt

3) $a = H - x = \frac{3}{4}H - \frac{1}{2}S \mp \sqrt{(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}H)^2 - \frac{1}{2}S^2}$

u. s. w.

§. 129.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und die Summe der einen Kathete und des an der andern liegenden Abschnittes gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 138.

Es werde zuerst der Fall betrachtet, wenn die Summe der größern Kathete und des kleinern Abschnittes gegeben ist. Es läßt sich dann der Fall für die Summe der kleinern Kathete und des größern Abschnittes leicht darnach beurtheilen.

Analysis. Nennt man die Hypotenuse H, die Summe

der größern Kathe und kleinern Abschnittes S, die Kathete x, so ist der kleinere Abschnitt S — x, der größere Abschnitt

$$H - (S - x) = x + H - S.$$

Da die Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem ihr anliegenden Abschnitt bildet, so gewinnt man hieraus folgende Gleichung

$$H.(x + H - S) = x^2.$$

also $x^2 - Hx = H^2 - SH$

oder $(x - \frac{1}{2}H)^2 = x\,\frac{1}{4}H^2 - SH$

und hieraus $x = \frac{1}{2}H \pm \sqrt{\frac{1}{4}H^2 - SH}$

Da unter x die größere Kathete und unter H die Hypotenuse in dem zu suchenden Dreieck verstanden ist, so ist klar, daß die größere Kathete größer als die Hälfte der Hypotenuse seyn müsse. Hieraus ergibt sich, daß in obiger Gleichung vor dem Wurzelzeichen das positive Zeichen stehen müsse. Die Gleichung für die Kathete ist daher folgende

1) $x = \frac{1}{2}H + \sqrt{(\frac{1}{4}H - S)H}$

für den kleineren Abschnitt

2) $a = S - x = S - \frac{1}{2}H - \sqrt{(\frac{1}{4}H - S)H}$

für den größern Abschnitt

3) $A = x + H - S = \frac{3}{2}H - S + \sqrt{(\frac{1}{4}H - S)H}$

für die Höhe

4) $h = \sqrt{(2S - x)(x + H - S)} =$

$$= \sqrt{2HS - S^2 - \frac{3}{4}H^2 - H\sqrt{[(\frac{1}{4}H - S)H]}}$$

für die kleinere Kathete

$$k = \sqrt{(S - x)H} = \sqrt{(SH - \frac{1}{2}H^2) - \sqrt{[(\frac{1}{4}H - S)H]}}$$

Construction nach der Gleichung 1. Die Hypotenuse sey H = BC, und die Summe S = EF. Man verlängere die Hypotenuse um ihr Viertel, so daß EB = $\frac{1}{4}$H und schneide auf EB die Summe EF ab, beschreibe über der Hypotenuse BC einen Halbkreis BKAC und errichte in F die Linie EF bis zum Durchschnitte K der Peripherie senkrecht, ziehe BK und verlängere die Hälfte der Hypotenuse MB um BG = BK, so ist MG die gesuchte Kathete. Trägt man diese Linie AC = MG von einem Endpunkte C der Hypotenuse, als Sehne, in

dem Halbkreis BAC und zieht BA, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen einen positiven Werth hat, oder in o übergeht; sie wird unmöglich, wenn er einen negativen Werth bekommt, also, wenn S größer als $\frac{1}{4}H$ werden sollte. Hieraus ergibt sich der Schluß, daß die Summe der einen Kathete und des nicht anliegenden Abschnittes nie größer als $\frac{1}{4}H$ werden kann. Erreicht er ihn, so geht der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in o über. Geschieht dieß, so wird die Kathete GM oder BA der Hälfte der Hypotenuse BM gleich, und hieraus ergibt sich unmittelbar nach der Gleichung 2 für die Bestimmung des nicht anliegenden, also hier für den größern Abschnitt, daß derselbe drei Viertheile von der Hypotenuse beträgt, und der kleinere also ein Viertheil.

Man gewinnt also in dem Falle, wenn die eine Kathete der Hälfte der Hypotenuse gleich ist, folgende Bestimmung für den kleinern Abschnitt

$$a = \tfrac{1}{4}H$$

für den größern Abschnitt

$$A = \tfrac{3}{4}H$$

u. s. w.

In der That gewinnt man auch, wenn man umgekehrt aus diesen Bestimmungen die Kathete k berechnet, da sie die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und ihrem Viertel ist

$$K = \sqrt{H \cdot \tfrac{1}{4}H} = \tfrac{1}{2}H.$$

Nach diesen Bemerkungen läßt sich nun auch der Fall bestimmen, wenn die kleinere Kathete und der größere Abschnitt gegeben ist. Die kleinere kann nämlich von o an wachsen und bis zu der Größe $\sqrt{\frac{1}{2}H^2}$ zu nehmen. Die Summe der größern Kathete und des kleinern Unterschieds kann aber nie der Hypotenuse BE gleich werden. Da nun von der Größe beider die Linie BF abhängt, so kann diese nie dem vierten Theile der Hypotenuse BC gleich werden, da ferner von der Größe der Linie BF die Größe der zuzufügenden Größe BK abhängt, so kann auch diese nie der halben Hypotenuse gleich werden. Also ist in der Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2}H \pm \sqrt{(\tfrac{5}{4}H - S)H}$$

der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen von solcher Beschaffenheit, daß er nie gleich $\frac{1}{2}H$ werden kann. Hieraus folgt, daß vor dem Wurzelzeichen, sowohl das positive als negative Zeichen stehen kann, und also zwei rechtwinklige Dreiecke möglich sind. Man gewinnt daher für den genannten Fall folgende Bestimmung:

für die kleinere Kathete

1) $x = \frac{1}{2}H \pm \sqrt{(\frac{1}{2}H - S)H}$

für den kleineren Abschnitt

2) $a = S - x = S - \frac{1}{2}H \mp \sqrt{(\frac{1}{2}H - S)H}$

u. s. w.

Aus diesen Bemerkungen entnimmt sich Folgendes:

Die Aufgabe: aus der Hypotenuse und der Summe der Kathete und des nicht anliegenden Abschnittes ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden ist bestimmt, wenn die Summe der größern Kathete und des kleinern Abschnittes gegeben, oder wenn die Summe beider um den vierten Theil größer als die Hypotenuse ist, oder wenn ein Dreieck mit der größern oder kleinern Höhe angezeigt ist.

Die Aufgabe ist unbestimmt, wenn die Summe der kleinern Kathete und des größern Abschnittes gegeben ist.

§. 130.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und die Summe der Quadrate der einen Kathete und des an der andern liegenden Abschnittes gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 139.

Erste Auflösung. Die Hypotenuse sey BC, die Seite des Summenquadrates FD. Man beschreibe über BC einen Halbkreis BAC, verlängere BC um die Hälfte der Hypotenuse CG = $\frac{1}{2}$BC und beschreibe auch über BG einen Halbkreis BEG, errichte in dem Mittelpunkte M eine unbestimmte Linie senkrecht, welche die beiden Halbkreise durchschneidet, verbinde ihren Durchschnittspunkt E mit der Peripherie des äussern Kreises mit dem Endpunkte B durch die gerade Linie BE, und trage die Linie BE = MF auf die senkrechte Linie MF und beschreibe von F aus mit FD einen Kreisbogen, der die Hypotenuse in D durchschneidet, so sind BD und DC die Abschnitte des gesuchten Dreiecks. Errichtet man in D die Linie DA senkrecht bis zum Durchschnitt A des Halbkreises BAC, und zieht die Linie BA und AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Man ziehe die Linien BE, DF und EG. Nach der Construction ist die Linie CG = $\frac{1}{2}$BC, also BM = MC

= CG und BE = MF, ferner sind die Dreiecke BEG und DFM rechtwinklig. Das Dreieck DFM führt zu folgender Gleichung $DF^2 = DM^2 + MF^2$
oder da MF = BE ist, $DF^2 = DM^2 + BE^2$
Die Linie BE ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse BG und dem Abschnitt BM, also $BE^2 = BM \cdot BG$. Die Einführung dieses Werthes in obige Gleichung erzeugt folgende $DF^2 = DM^2 + BM \cdot BG$. Da aber BG = BC + CG = BC + MB ist, so gewinnt man

1) $DF^2 = DM^2 + (BC + MC)\,MB =$
$= BC \cdot BM + MC \cdot MB + DM^2$

Die Linie BC läßt sich in BD + DC, und BM = BD + DM zerlegen und demnach ist das Produkt

$BC \cdot BM = (BD + DC)(BD + DM)$
$= BD^2 + BD \cdot DC + DM\,(BD + DC)$
$= BD^2 + BD \cdot DC + DM \cdot BC$

oder, da BC = MC + MC = 2MC ist,

$BC \cdot BM = BD^2 + BD \cdot DC + 2\,DM \cdot MC$

führt man diesen Werth in die Gleichung 1 ein, so entsteht

2) $DF^2 = BD^2 + BD \cdot DC + 2 \cdot DM \cdot MC + MC \cdot MB + DM^2$

Berücksichtigt man endlich, daß die Linie DA die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten BD und DC der Hypotenuse, daß also $BD \cdot DC = DA^2$, und daß ferner MC = MB, also auch $MC \cdot MB = MC^2$ ist, und führt man diese Werthe in die Gleichung 2 ein, so erhält man hieraus folgende

3) $DF^2 = BD^2 + AD^2 + DM^2 + 2\,DM \cdot MC + MC^2$

oder, da $DM^2 + 2\,DM \cdot MC + MC^2 = (DM + MC)^2 = DC^2$

$DF^2 = BD^2 + AD^2 + DC^2$

Die Linien DA und DC sind die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ADC, also ist $AD^2 + DC^2 = AC^2$.
Hieraus ergibt sich also

4) $DF^2 = BD^2 + AC^2$

Das Dreieck BAC ist rechtwinklig, hat die gegebene Hypotenuse und die Summe der Quadrate der einen Kathete und des nicht anliegenden Abschnittes ist dem gegebenen Quadrat gleich, also ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Zweite Auflösung. Nennt man die Hypotenuse H, die Summe der Quadrate S^2, den Abschnitt x, so ist der andere Abschnitt H — x, das Quadrat der ihm anliegenden Kathete $H^2 = S^2 - x^2$. Da nun die Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem ihr anliegenden Abschnitte ist, so gewinnt man folgende Gleichung $S^2 - x^2 = H(H - x)$

$$S^2 - H^2 = x^2 - Hx$$

oder $S^2 - H^2 + \frac{1}{4}H^2 = (x - \frac{1}{2}H)^2$

also $x = \frac{1}{2}H \pm \sqrt{S^2 - \frac{3}{4}H^2}$

Da der zu suchende Abschnitt entweder größer, oder kleiner ist, als die Hälfte der Hypotenuse, so leiten sich hieraus folgende Bestimmungen ab:

für den größern Abschnitt

1) $A = \frac{1}{2}H + \sqrt{S^2 - \frac{3}{4}H^2}$

für den kleinern Abschnitt

2) $a = \frac{1}{2}H - \sqrt{S^2 - \frac{3}{4}H^2}$

für die Höhe

3) $h = \sqrt{a \cdot A} = \sqrt{\frac{1}{4}H^2 - H\sqrt{(S^2 - \frac{3}{4}H^2)}}$

für die kleinere Kathete

4) $k = \sqrt{H \cdot a} = \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - H\sqrt{(S^2 - \frac{3}{4}H^2)}}$

für die größere Kathete

5) $K = \sqrt{H \cdot A} = \sqrt{\frac{1}{2}H^2 + H\sqrt{(S^2 - \frac{3}{4}H^2)}}$

§. 131.

Aufgabe. Die Hypotenuse und der Unterschied der beiden Katheten ist gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 140. Die Hypotenuse sey BC, der Unterschied BE. Man verlängere den gegebenen Unterschied BE und lege auf seiner Verlängerung an dem Punkte E den Winkel CEA = ½R an, und trage an dem andern Endpunkte B die Hypotenuse BC so an, daß sie mit ihrem Endpunkt C in den Schenkel des Winkels EC falle; fälle von C aus auf

die Verlängerung der Linie BE die senkrechte Linie CA, so ist BCA das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Zweite Auflösung. Fig. 141. Man beschreibe auf die angegebene Art mit der Hypotenuse und dem Unterschied BE das Dreieck BEC, und über der Linie EC den Halbkreis EAC, verlängere BC bis zu dem Durchschnitt A der Kreislinie EAC und ziehe AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Dritte Auflösung. Fig. 142. Man beschreibe das Dreieck BEC, verlängere den Unterschied, halbire die Linie EC und errichte in ihrem Mittelpunkte D eine senkrechte Linie DA bis zum Durchschnitte A mit der Verlängerung von BE, ziehe AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Vierte Auflösung. Fig. 143. Man lege an dem einen Endpunkt E des gegebenen Unterschiedes den Winkel BEC $= \frac{1}{2}$R mit unbestimmten Schenkel an und trage von dem andern Endpunkte B die Hypotenuse BC so an, daß ihr Endpunkt in die Verlängerung des Schenkels CE falle; fälle von diesem Einfallpunkt C die Linie CA senkrecht auf den verlängerten Unterschied, so ist CBA das gesuchte Dreieck.

Eine fünfte Auflösung gewinnt man, wenn man Fig. 144., auf die eben genannte Art das Dreieck CEB vollendet, über CE einen Halbkreis beschreibt, EB bis zum Durchschnitte A des Halbkreises verlängert und AC zieht. CAB ist das gesuchte Dreieck.

Eine sechste Auflösung gewinnt man, wenn man Fig. 145., das Dreieck CEB vollendet, in dem Mittelpunkte D der Linie CE eine senkrechte DA bis zum Durchschnitte der verlängerten EB errichtet und dann CA zieht. BCA ist das gesuchte Dreieck.

Beweis zur ersten Auflösung. Vermöge der Construction ist der Winkel $x = \frac{1}{2}$R, der Winkel BAC $=$ R. Also ist der dritte Winkel im Dreieck ECA, $x = 2$R $-$ R $- \frac{1}{2}$R $= \frac{1}{2}$R, und das Dreieck EAC gleichschenklig und die Linie EA $=$ CA. Geht man von dem Dreieck CEA auf das Dreieck CBA über, so ist dieses ein rechtwinkliges, hat die gegebene Linie BC als Hypotenuse und die Kathete BA, welche

um den gegebenen Unterschied größer ist, als AC; entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

Auf gleiche Weise wird der Beweis zur zweiten und dritten Auflösung geführt.

Beweis zur dritten Auflösung. Nach der Construction ist die Linie CB der gegebenen Hypotenuse und EB dem gegebenen Katheten-Unterschied gleich, der Winkel CEA $= \frac{1}{4}R$ und der Winkel CAE $= R$. Hieraus folgt, daß der dritte Winkel im Dreieck

$$ECA = 2R - R - \tfrac{1}{4}R = \tfrac{3}{4}R$$

und also $x = ECA$, das Dreieck CEA gleichschenklig und folglich $EA = CA$ ist.

Geht man von dem Dreiecke CEA auf das Dreieck CBA über, so ist dasselbe, wegen des Winkels bei A, rechtwinklig, hat die Linie CB als Hypotenuse und eine Kathete BA, welche um den gegebenen Unterschied EB kleiner als die andere CA ist, und entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

Siebente Auflösung. Nennt man die Hypotenuse H, den gegebenen Unterschied d, die kleinere Kathete x, so ist die größere $x + d$, und hieraus gewinnt man nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$x^2 + (x + d)^2 = H^2$$

und hieraus $x^2 + dx = \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}d^2$

oder $(x + \frac{1}{2}d)^2 = \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}d^2$

Es gilt also für die kleinere Kathete folgende Gleichung

1) $x = \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}d^2} - \frac{1}{2}d$

für die größere folgende

2) $H = x + d = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}d^2}$

§. 132.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und der Unterschied der Quadrate der beiden Katheten gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 146.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC, die Seite des Unterschiedes des Quadrats sey CE. Man beschreibe über der

gegebenen

$$BD + AD = BD + EF = BE$$

ist, und daß die Summe des kleinern Abschnittes BD und der Höhe AD im Dreieck BAC der gegebenen Summe BE gleich sind. Das Dreieck BAC hat ferner die gegebene Hypotenuse BC, ist wegen des Winkels BAC im Halbkreis rechtwinklig, und erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Nennt man die Hypotenuse H, die Summe der Höhe und des kleinern Abschnittes S, den kleinern Abschnitt selbst x, so ist die Höhe $S - x$ und der größere Abschnitt $H - x$, und hieraus gewinnt man, da die Höhe die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse ist, folgende Gleichung

$$x(H - x) = (S - x)^2$$

oder $$xH - x^2 = S^2 - 2Sx + x^2$$

also $$x^2 - (S + \tfrac{1}{2}H)x = -\tfrac{1}{2}S^2$$

oder $$[x - (\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{4}H)]^2 = (\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{2}S^2$$

und hieraus $$x = \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{4}H \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{2}S^2}$$

Es fragt sich nun: ob in der hier aufgefundenen Gleichung das Wurzelzeichen mit dem negativen oder positiven Zeichen versehen seyn müsse? Berücksichtigt man, daß der kleinere Abschnitt x immer kleiner als die Hälfte der Summe seiner selbst und der Höhe, und des vierten Theils der Hypotenuse seyn muß, so wird das Wurzelzeichen nur mit dem negativen Zeichen versehen seyn können. Hieraus fließt also folgende Gleichung für den kleinern Abschnitt

1) $$x = \tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{4}H - \sqrt{(\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{2}S^2}$$

für die Höhe

2) $$h = S - x = \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{4}H + \sqrt{(\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{2}S^2}$$

für den größern Abschnitt

3) $$A = H - x = \tfrac{3}{4}H - \tfrac{1}{2}S + \sqrt{(\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{2}S^2}$$

für die kleinere Kathete

4) $$k = \sqrt{H.x} = \sqrt{\tfrac{1}{4}H^2 + \tfrac{1}{2}S.H - H\sqrt{[(\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{2}S^2]}}$$

für die größere Kathete

5) $$K = \sqrt{H.A} = \sqrt{\tfrac{3}{4}H^2 - \tfrac{1}{2}SH + H\sqrt{[(\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{2}S^2]}}$$

mit ihren Endpunkten auf BC aufstehen, der also ein rechter ist, rechtwinklig. Es erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe und ist das gesuchte Dreieck.

Zweite Auflösung. Nennt man die Hypotenuse H, den Unterschied der Quadrate der beiden Katheten d^2, die kleinere Kathete x, so gewinnt man für das Quadrat der größern Kathete folgende Gleichung

$$1) \quad H^2 = x^2 + d^2$$

und hieraus für die Hypotenuse, welche der Summe der beiden Katheten-Quadrate gleich kommt

$$H^2 = x^2 + x^2 + d^2$$

Es bestimmt sich die kleinere Kathete durch folgende Gleichung

$$2) \quad x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(H^2 - d^2)}$$

die größere nach 1 durch folgende

$$3) \quad H = \sqrt{x^2 + d^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}H^2 + \tfrac{1}{2}d^2}$$

Auch diese Formeln führen zu einfachen Constructionen.

§. 133.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und der Unterschied zwischen der Höhe und dem größern Abschnitte gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 147.

Erste Auflösung. Die Hypotenuse sey BC, der Unterschied zwischen der Höhe und dem Abschnitte EC. Man beschreibe über der Hypotenuse BC einen Halbkreis und schneide von einem ihrer Endpunkte C den gegebenen Unterschied CE ab und lege auf BE in dem Punkte E den Winkel $BEA = \frac{1}{2}R$, verlängere EA bis zum Durchschnitte A des Halbkreises und verbinde den Punkt A mit B und C durch die Linien BA und AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Der Winkel BAC steht mit den Endpunkten seiner Schenkel AB und AC auf den Endpunkten B und C des Durchmessers BC auf und seine Spitze A liegt in der Peripherie, folglich ist er ein Rechter und das Dreieck BAC ist ein rechtwinkliges. Fällt man nun von dem Punkte A die

Linie AD senkrecht auf die Hypotenuse, so erzeugt sie die Abschnitte AD und DC und das rechtwinklige Dreieck ADE, das wegen des Winkels DEA $= \frac{1}{2}$R gleichschenklig ist. Es ist also AD $=$ DE und

$$EC = DC - DE = DC - AD$$

Hieraus folgt, daß in dem rechtwinkligen Dreiecke BAC der Unterschied des größern Abschnittes und der Höhe dem gegebenen Unterschied, und seine Hypotenuse der gegebenen gleich ist.

Zweite Auflösung. Nennt man die Hypotenuse H, den gegebenen Unterschied d, die Höhe x, so ist der größere Abschnitt $x + d$, der kleinere $H - (x + d)$. Da nun die Höhe die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse ist, so gewinnt man folgende Gleichung $(x + d)\,[H - (x + d)] = x^2$

und wenn sie entwickelt wird, folgende

$$2x^2 - (H - 2d)\,x = (H - d)\,d$$

oder $[x - (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)]^2 = \frac{1}{2}(H - d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2$

und hieraus $x = \frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{2}H - \frac{1}{2}d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2}$

Da der vierte Theil der Hypotenuse, vermindert um den halben Unterschied der Höhe und des Abschnittes immer kleiner, als der größere Abschnitt seyn muß, ja sogar eine negative Größe werden kann, so ist klar, daß vor dem Wurzelzeichen das positive Zeichen stehen müsse. Demnach gilt also für die Höhe folgende Gleichung

1) $x = \frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}(H - d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2}$

für den größern Abschnitt

2) $A = x + d = \frac{1}{4}H + \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}(H - d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2}$

für den kleinern Abschnitt

3) $a = H - (x + d) = \frac{3}{4}H - \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{2}(H - d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2}$

für die kleinere Kathete, als welche die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem kleinern Abschnitt ist

4) $k = \sqrt{H \cdot a} = \sqrt{[\frac{3}{4}H^2 - \frac{1}{2}Hd - H\sqrt{(\frac{1}{2}H - \frac{1}{2}d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2}\,]}$

für die größere Kathete

5) $K = \sqrt{H(x + d)} = \sqrt{[\frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}dH + \sqrt{\frac{1}{2}(H - d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2}\,]}$

Aus allen diesen Formeln lassen sich nach den Lehren des zweiten Kapitels neue Constructionen entwickeln, und das verlangte Dreieck bilden.

§. 134.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und der Unterschied zwischen der Höhe und dem kleinern Abschnitte gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig 148.

Erste Auflösung. Die Hypotenuse sey BC, der Unterschied BE. Man beschreibe über der Hypotenuse einen Halbkreis BAC, verlängere die Hypotenuse BC um den gegebenen Unterschied BE und lege an seinem Endpunkt E einen Winkel AED $= \frac{1}{2}$R, und verlängere seinen Schenkel so, daß er den Halbkreis in A treffe, ziehe AC und AB, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Der Winkel BAC steht mit den Endpunkten seiner Schenkel auf denen des Durchmessers im Halbkreis BAC auf und liegt mit seiner Spitze im Halbkreis, ist also ein Rechter und folglich das Dreieck BAC rechtwinklig, und enthält die Linie BC als Hypotenuse. Wird von der Spitze A auf die Hypotenuse die Linie AD senkrecht gefällt, so entsteht wegen des rechten Winkels bei D, das rechtwinklige Dreieck AED. Dieses Dreieck ist, da nach der Construction der Winkel AED $= \frac{1}{2}$R ist, zugleich gleichschenklig, also AD $=$ ED, und folglich auch

$$EB = ED - BD = AD - BD.$$

Das Dreieck ABC ist also rechtwinklig und hat den gegebenen Unterschied zwischen der Höhe und dem kleinern Abschnitt und die gegebene Hypotenuse.

Anmerkung. Man erkennt leicht, daß sich aus den gegebenen Bestimmungen zwei Dreiecke BAC und B′A′C bilden lassen, welche beide den Anforderungen der Aufgabe genügen. Dieß hängt von den Durchschnitten A′ und A, der unter dem Winkel von 45° angelegten Linie EA′A ab, denn in dem Dreiecke BA′C ist eben so, wie in dem Dreiecke BAC die Linie EB dem Unterschiede zwi-

dem Halbkreis BAC und zieht BA, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen einen positiven Werth hat, oder in o übergeht; sie wird unmöglich, wenn er einen negativen Werth bekommt, also, wenn S größer als $\frac{1}{4}$H werden sollte. Hieraus ergibt sich der Schluß, daß die Summe der einen Kathete und des nicht anliegenden Abschnittes nie größer als $\frac{1}{4}$H werden kann. Erreicht er ihn, so geht der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in o über. Geschieht dieß, so wird die Kathete GM oder BA der Hälfte der Hypotenuse BM gleich, und hieraus ergibt sich unmittelbar nach der Gleichung 2 für die Bestimmung des nicht anliegenden, also hier für den größern Abschnitt, daß derselbe drei Viertheile von der Hypotenuse beträgt, und der kleinere also ein Viertheil.

Man gewinnt also in dem Falle, wenn die eine Kathete der Hälfte der Hypotenuse gleich ist, folgende Bestimmung für den kleinern Abschnitt

$$a = \tfrac{1}{4}H$$

für den größern Abschnitt

$$A = \tfrac{3}{4}H$$

u. s. w.

In der That gewinnt man auch, wenn man umgekehrt aus diesen Bestimmungen die Kathete k berechnet, da sie die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und ihrem Viertel ist

$$K = \sqrt{H \cdot \tfrac{1}{4}H} = \tfrac{1}{2}H.$$

Nach diesen Bemerkungen läßt sich nun auch der Fall bestimmen, wenn die kleinere Kathete und der größere Abschnitt gegeben ist. Die kleinere kann nämlich von o an wachsen und bis zu der Größe $\sqrt{\frac{1}{2}H^2}$ zu nehmen. Die Summe der größern Kathete und des kleinern Unterschieds kann aber nie der Hypotenuse BE gleich werden. Da nun von der Größe beider die Linie BF abhängt, so kann diese nie dem vierten Theile der Hypotenuse BC gleich werden, da ferner von der Größe der Linie BF die Größe der zuzufügenden Größe BK abhängt, so kann auch diese nie der halben Hypotenuse gleich werden. Also ist in der Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2}H \pm \sqrt{(\tfrac{5}{4}H - S)H}$$

der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen von solcher Beschaffenheit, daß er nie gleich $\frac{1}{2}$H werden kann. Hieraus folgt, daß vor dem Wurzelzeichen, sowohl das positive als negative Zeichen stehen kann, und also zwei rechtwinklige Dreiecke möglich sind. Man gewinnt daher für den genannten Fall folgende Bestimmung:

des Unterschieds-Quadrates d, den kleinern Abschnitt x, so ist der größere $H - x$, das Quadrat der Höhe aber ist

$$h^2 = x^2 + d^2.$$

Berücksichtigt man nun, daß die Höhe die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Grundlinie ist, so ergibt sich hieraus folgende Gleichung

$$(H - x)\,x = x^2 + d^2$$

nach vorgenommener Entwicklung und Versetzung der Glieder

$$x^2 - \tfrac{1}{4}H\,x = -\tfrac{1}{4}d^2$$

oder $$(x - \tfrac{1}{4}H)^2 = (\tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{4}d^2$$

und hieraus $$x = \tfrac{1}{4}H \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{4}d^2}$$

Es frägt sich, welches Zeichen vor dem Ausdrucke unter dem Wurzelzeichen stehen müsse? Da die gesuchte Linie x den kleinern Abschnitt bedeutet, und $\frac{1}{4}H$ den vierten Theil der Hypotenuse, der kleinere Abschnitt aber bis zur Hälfte der Hypotenuse wachsen kann, also größer und kleiner, als der vierte Theil der Hypotenuse werden kann, so läßt sich leicht entnehmen, daß das positive und negative Zeichen stehen könne, und daß die Aufgabe unbestimmt ist und zwei Auflösungen zuläßt. Hat der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen das negative Zeichen, so deutet die gefundene Formel auf ein rechtwinkliges Dreieck, das einen kleineren Abschnitt und kleinere Höhe hat; hat er das positive, so deutet sie auf ein Dreieck von größerem Abschnitte und größerer Höhe. Demnach gewinnt man für die einzelnen Linien des zu bildenden Dreiecks folgende Bestimmungen

für den kleinern Abschnitt

1) $$x = \tfrac{1}{4}H \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{2}d^2}$$

für den größern Abschnitt

2) $$A = H - x = \tfrac{3}{4}H \mp \sqrt{\tfrac{1}{16}H^2 - \tfrac{1}{2}d^2}$$

für die Höhe

3) $$h = \sqrt{x^2 + d^2} = \sqrt{\tfrac{1}{8}H^2 + \tfrac{1}{2}d^2 \pm \tfrac{1}{4}H\sqrt{(\tfrac{1}{16}H^2 - \tfrac{1}{8}d^2)}}$$

für die kleinere Kathete

4) $$k = \sqrt{H.x} = \sqrt{\tfrac{1}{4}H^2 \pm H\sqrt{(\tfrac{1}{16}H^2 - \tfrac{1}{2}d^2)}}$$

für die größere Kathete

5) $$K = \sqrt{H.(H-x)} = \sqrt{\tfrac{3}{4}H^2 \mp H\sqrt{(\tfrac{1}{16}H^2 - \tfrac{1}{2}d^2)}}$$

Construction nach der ersten Formel und für ein rechtwinkliges Dreieck mit kleinerem Abschnitt. Die Hypotenuse sey BC, die Seite des Unterschieds-Quadrates GF. Man beschreibe über der Hypotenuse BC den Halbkreis BAC, suche den vierten Theil der Hypotenuse $\frac{1}{4}H = BG$, lege auf der Linie BC an den Punkt G die Quadratseite GF und ihre Hälfte GK, beschreibe über KF einen Halbkreis KEF und errichte in dem Punkte G die senkrechte Linie GE bis zum Durchschnitte der Peripherie des Halbkreises KEF und trage von E aus den vierten Theil der Hypotenuse $ED = \frac{1}{4}H$ an, so ist BD der kleinere Abschnitt und DC der größere im Dreieck BAC. Errichtet man in dem Punkte D eine senkrechte Linie bis zum Durchschnitte A mit der Peripherie des Halbkreises BAC und zieht BA und AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Anmerkung. Die Formel für das Dreieck mit größerer Höhe und größerem Abschnitte construirt sich leicht, wenn man die Linie ED′ auf der entgegengesetzten Seite von EG anträgt, und es ist alsdann $BD = BG + GD' = \frac{1}{4}H + \sqrt{(\frac{1}{4}H)^2 - \frac{1}{2}d^2}$. Das rechtwinklige Dreieck, wozu man in diesem Falle geführt wird, ist BA′C.

Die Aufgabe ist bestimmt, wenn der kleinere Abschnitt dem vierten Theile der Hypotenuse gleich wird.

Zusatz. Wird die Aufgabe vorgelegt, aus der Hypotenuse und dem Unterschiede zwischen den Quadraten der Höhe und des größeren Abschnittes ein rechtwinkliges Dreieck zu bestimmen, so führt eine ähnliche Analysis zu folgenden Bestimmungen für den größern Abschnitt

$$x = A = \tfrac{1}{4}H + \sqrt{\tfrac{1}{2}D^2 + (\tfrac{1}{4}H)^2}$$

für den kleinern Abschnitt

$$y = H - x = \tfrac{3}{4}H - \sqrt{\tfrac{1}{2}D^2 + \tfrac{1}{16}H^2}$$

für die größere Kathete

$$K = \sqrt{H \cdot A} = \sqrt{\tfrac{1}{4}H^2 + H\sqrt{(\tfrac{1}{2}D^2 + \tfrac{1}{16}H^2)}}$$

u. s. w.

Jede dieser Formeln führt auf ein bestimmtes rechtwinkliges Dreieck.

§. 136.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und der Ueberschuß

um den gegebenen Unterschied größer ist, als AC; entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

Auf gleiche Weise wird der Beweis zur zweiten und dritten Auflösung geführet.

Beweis zur dritten Auflösung. Nach der Construction ist die Linie CB der gegebenen Hypotenuse und EB dem gegebenen Katheten-Unterschied gleich, der Winkel CEA $= \frac{1}{2}R$ und der Winkel CAE $= R$. Hieraus folgt, daß der dritte Winkel im Dreieck

$$ECA = 2R - R - \tfrac{1}{2}R = \tfrac{1}{2}R$$

und also $x = ECA$, das Dreieck CEA gleichschenklig und folglich $EA = CA$ ist.

Geht man von dem Dreiecke CEA auf das Dreieck CBA über, so ist daſſelbe, wegen des Winkels bei A, rechtwinklig, hat die Linie CB als Hypotenuse und eine Kathete BA, welche um den gegebenen Unterschied EB kleiner als die andere CA ist, und entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

Siebente Auflösung. Nennt man die Hypotenuse H, den gegebenen Unterschied d, die kleinere Kathete x, so ist die größere $x + d$, und hieraus gewinnt man nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$x^2 + (x + d)^2 = H^2$$

und hieraus $x^2 + dx = \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}d^2$

oder $(x + \frac{1}{2}d)^2 = \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}d^2$

Es gilt also für die kleinere Kathete folgende Gleichung

1) $x = \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}d^2} - \frac{1}{2}d$

für die größere folgende

2) $H = x + d = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}d^2}$

§. 132.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und der Unterschied der Quadrate der beiden Katheten gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 146.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC, die Seite des Unterschiedes des Quadrats sey CE. Man beschreibe über der

gegebenen

die Verlängerung der Linie BE die senkrechte Linie CA, so ist BCA das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Zweite Auflösung. Fig. 141. Man beschreibe auf die angegebene Art mit der Hypotenuse und dem Unterschied BE das Dreieck BEC, und über der Linie EC den Halbkreis EAC, verlängere BC bis zu dem Durchschnitt A der Kreislinie EAC und ziehe AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Dritte Auflösung. Fig. 142. Man beschreibe das Dreieck BEC, verlängere den Unterschied, halbire die Linie EC und errichte in ihrem Mittelpunkte D eine senkrechte Linie DA bis zum Durchschnitte A mit der Verlängerung von BE, ziehe AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Vierte Auflösung. Fig. 143. Man lege an dem einen Endpunkt E des gegebenen Unterschiedes den Winkel BEC $= \frac{1}{2}$R mit unbestimmten Schenkel an und trage von dem andern Endpunkte B die Hypotenuse BC so an, daß ihr Endpunkt in die Verlängerung des Schenkels CE falle; fälle von diesem Einfallpunkt C die Linie CA senkrecht auf den verlängerten Unterschied, so ist CBA das gesuchte Dreieck.

Eine fünfte Auflösung gewinnt man, wenn man Fig. 144., auf die eben genannte Art das Dreieck CEB vollendet, über CE einen Halbkreis beschreibt, EB bis zum Durchschnitte A des Halbkreises verlängert und AC zieht. CAB ist das gesuchte Dreieck.

Eine sechste Auflösung gewinnt man, wenn man Fig. 145., das Dreieck CEB vollendet, in dem Mittelpunkte D der Linie CE eine senkrechte DA bis zum Durchschnitte der verlängerten EB errichtet und dann CA zieht. BCA ist das gesuchte Dreieck.

Beweis zur ersten Auflösung. Vermöge der Construction ist der Winkel $x = \frac{1}{2}$R, der Winkel BAC $=$ R. Also ist der dritte Winkel im Dreieck ECA, $x = 2$R $-$ R $- \frac{1}{2}$R $= \frac{1}{2}$R, und das Dreieck EAC gleichschenklig und die Linie EA $=$ CA. Geht man von dem Dreieck CEA auf das Dreieck CBA über, so ist dieses ein rechtwinkliges; hat die gegebene Linie BC als Hypotenuse und die Kathete BA, welche

um den gegebenen Unterschied größer ist, als AC; entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

Auf gleiche Weise wird der Beweis zur zweiten und dritten Auflösung geführt.

Beweis zur dritten Auflösung. Nach der Construction ist die Linie CB der gegebenen Hypotenuse und EB dem gegebenen Katheten-Unterschied gleich, der Winkel CEA $= \frac{1}{3}R$ und der Winkel CAE $= R$. Hieraus folgt, daß der dritte Winkel im Dreieck

$$ECA = 2R - R - \tfrac{1}{3}R = \tfrac{2}{3}R$$

und also $x = ECA$, das Dreieck CEA gleichschenklig und folglich $EA = CA$ ist.

Geht man von dem Dreiecke CEA auf das Dreieck CBA über, so ist dasselbe, wegen des Winkels bei A, rechtwinklig, hat die Linie CB als Hypotenuse und eine Kathete BA, welche um den gegebenen Unterschied EB kleiner als die andere CA ist, und entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

Siebente Auflösung. Nennt man die Hypotenuse H, den gegebenen Unterschied d, die kleinere Kathete x, so ist die größere $x + d$, und hieraus gewinnt man nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$x^2 + (x + d)^2 = H^2$$

und hieraus $x^2 + dx = \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}d^2$

oder $(x + \frac{1}{2}d)^2 = \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}d^2$

Es gilt also für die kleinere Kathete folgende Gleichung

1) $x = \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}d^2} - \frac{1}{2}d$

für die größere folgende

2) $H = x + d = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{4}d^2}$

§. 132.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und der Unterschied der Quadrate der beiden Katheten gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 146.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC, die Seite des Unterschiedes des Quadrats sey CE. Man beschreibe über der gegebenen

Linie AD senkrecht auf die Hypotenuse, so erzeugt sie die Abschnitte AD und DC und das rechtwinklige Dreieck ADE, das wegen des Winkels DEA $= \frac{1}{2}R$ gleichschenklig ist. Es ist also AD $=$ DE und

$$EC = DC - DE = DC - AD$$

Hieraus folgt, daß in dem rechtwinkligen Dreiecke BAC der Unterschied des größern Abschnittes und der Höhe dem gegebenen Unterschied, und seine Hypotenuse der gegebenen gleich ist.

Zweite Auflösung. Nennt man die Hypotenuse H, den gegebenen Unterschied d, die Höhe x, so ist der größere Abschnitt $x + d$, der kleinere $H - (x + d)$. Da nun die Höhe die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse ist, so gewinnt man folgende Gleichung $(x + d)\,[H - (x + d)] = x^2$
und wenn sie entwickelt wird, folgende

$$2x^2 - (H - 2d)\,x = (H - d)\,d$$

oder $[x - (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)]^2 = \frac{1}{2}(H - d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2$

und hieraus $x = \frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2}$

Da der vierte Theil der Hypotenuse, vermindert um den halben Unterschied der Höhe und des Abschnittes immer kleiner, als der größere Abschnitt seyn muß, ja sogar eine negative Größe werden kann, so ist klar, daß vor dem Wurzelzeichen das positive Zeichen stehen müsse. Demnach gilt also für die Höhe folgende Gleichung

1) $x = \frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}(H - d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2}$

für den größern Abschnitt

2) $A = x + d = \frac{1}{4}H + \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{2}(H - d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2}$

für den kleinern Abschnitt

3) $a = H - (x + d) = \frac{3}{4}H - \frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{2}(H - d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2}$

für die kleinere Kathete, als welche die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem kleinern Abschnitt ist

4) $k = \sqrt{H \cdot a} = \sqrt{[\frac{3}{4}H^2 - \frac{1}{2}Hd - H\sqrt{(\frac{1}{2}H - \frac{1}{2}d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2}\,]}$

für die größere Kathete

5) $K = \sqrt{H(x + d)} = \sqrt{[\frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}dH + \sqrt{\frac{1}{2}(H - d) \cdot d + (\frac{1}{4}H - \frac{1}{2}d)^2}\,]}$

Aus allen diesen Formeln lassen sich nach den Lehren des zweiten Kapitels neue Constructionen entwickeln, und das verlangte Dreieck bilden.

§. 134.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und der Unterschied zwischen der Höhe und dem kleinern Abschnitte gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig 148.

Erste Auflösung. Die Hypotenuse sey BC, der Unterschied BE. Man beschreibe über der Hypotenuse einen Halbkreis BAC, verlängere die Hypotenuse BC um den gegebenen Unterschied BE und lege an seinem Endpunkt E einen Winkel AED $= \frac{1}{2}$R, und verlängere seinen Schenkel so, daß er den Halbkreis in A treffe, ziehe AC und AB, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Der Winkel BAC steht mit den Endpunkten seiner Schenkel auf denen des Durchmessers im Halbkreis BAC auf und liegt mit seiner Spitze im Halbkreis, ist also ein Rechter und folglich das Dreieck BAC rechtwinklig, und enthält die Linie BC als Hypotenuse. Wird von der Spitze A auf die Hypotenuse die Linie AD senkrecht gefällt, so entsteht wegen des rechten Winkels bei D, das rechtwinklige Dreieck AED. Dieses Dreieck ist, da nach der Construction der Winkel AED $= \frac{1}{2}$R ist, zugleich gleichschenklig, also AD $=$ ED, und folglich auch

$$EB = ED - BD = AD - BD.$$

Das Dreieck ABC ist also rechtwinklig und hat den gegebenen Unterschied zwischen der Höhe und dem kleinern Abschnitt und die gegebene Hypotenuse.

Anmerkung. Man erkennt leicht, daß sich aus den gegebenen Bestimmungen zwei Dreiecke BAC und B′A′C bilden lassen, welche beide den Anforderungen der Aufgabe genügen. Dieß hängt von den Durchschnitten A′ und A, der unter dem Winkel von 45° angelegten Linie EA′A ab, denn in dem Dreiecke BA′C ist eben so, wie in dem Dreiecke BAC die Linie EB dem Unterschiede zwi-

schen der Höhe und dem kleinern Abschnitte gleich, wie sich leicht durch das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck EA'D beweisen läßt.

Die Aufgabe ist daher unbestimmt; es ist nur ein Dreieck möglich, wenn die Linie EA den Halbkreis berührt.

Zweite Auflösung. Nennt man die Hypotenuse H, den kleinern Abschnitt x, den Unterschied zwischen ihm und der Höhe d, so läßt sich die Höhe durch $x + d$ und der größere Abschnitt durch $H - x$ bezeichnen, und man gewinnt hieraus, da die Höhe die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse ist, folgende Gleichung

$$x(H - x) = (x + d)^2$$

Ihre Entwicklung führt zu folgender

$$x^2 - (\tfrac{1}{2}H - d)x = -\tfrac{1}{4}d^2$$

oder $$[x - (\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}d)]^2 = (\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}d)^2 - \tfrac{1}{4}d^2$$

und hieraus $$x = \tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}d)^2 - \tfrac{1}{4}d^2}$$

Diese Formel kann nach der Anmerkung zur ersten Auflösung sowohl das positive, als negative Zeichen vor dem Wurzelzeichen erhalten. Das positive Zeichen erzeugt ein Dreieck BAC, worin die Höhe größer ist, als in jenem, welches das negative erzeugt. Der letztere Fall gibt das Dreieck BA'C. Die Höhe bestimmt sich durch folgende Gleichung

$$h = x + d = \tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}d)^2 - \tfrac{1}{4}d^2}$$

der größere Abschnitt durch folgende

$$A = H - x = \tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}d \mp \sqrt{(\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}d)^2 - \tfrac{1}{4}d^2}$$

die kleinere Kathete durch folgende

$$k = \sqrt{H.x} = \sqrt{\tfrac{1}{4}H^2 - \tfrac{1}{2}dH \pm H\sqrt{[(\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}d)^2 - \tfrac{1}{4}d^2]}}$$

die größere aber durch folgende

$$K = \sqrt{H.A} = \sqrt{\tfrac{3}{4}H^2 + \tfrac{1}{2}Hd \mp H\sqrt{[(\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}d)^2 - \tfrac{1}{4}d^2]}}$$

§. 135.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und der Unterschied zwischen den Quadraten der Höhe und des kleinern Abschnittes gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 149.

Analysis. Nennt man die Hypotenuse H, die Seite

des Unterschieds-Quadrates d, den kleinern Abschnitt x, so ist der größere H — x, das Quadrat der Höhe aber ist

$$h^2 = x^2 + d^2.$$

Berücksichtigt man nun, daß die Höhe die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Grundlinie ist, so ergibt sich hieraus folgende Gleichung

$$(H - x)\,x = x^2 + d^2$$

nach vorgenommener Entwicklung und Versetzung der Glieder

$$x^2 - \tfrac{1}{2}Hx = -\tfrac{1}{2}d^2$$

oder $$(x - \tfrac{1}{4}H)^2 = (\tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{2}d^2$$

und hieraus $$x = \tfrac{1}{4}H \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{2}d^2}$$

Es frägt sich, welches Zeichen vor dem Ausdrucke unter dem Wurzelzeichen stehen müsse? Da die gesuchte Linie x den kleinern Abschnitt bedeutet, und $\frac{1}{4}$H den vierten Theil der Hypotenuse, der kleinere Abschnitt aber bis zur Hälfte der Hypotenuse wachsen kann, also größer und kleiner, als der vierte Theil der Hypotenuse werden kann, so läßt sich leicht entnehmen, daß das positive und negative Zeichen stehen könne, und daß die Aufgabe unbestimmt ist und zwei Auflösungen zuläßt. Hat der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen das negative Zeichen, so deutet die gefundene Formel auf ein rechtwinkliges Dreieck, das einen kleineren Abschnitt und kleinere Höhe hat; hat er das positive, so deutet sie auf ein Dreieck von größerem Abschnitte und größerer Höhe. Demnach gewinnt man für die einzelnen Linien des zu bildenden Dreiecks folgende Bestimmungen

für den kleinern Abschnitt

1) $$x = \tfrac{1}{4}H \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}H)^2 - \tfrac{1}{2}d^2}$$

für den größern Abschnitt

2) $$A = H - x = \tfrac{3}{4}H \mp \sqrt{\tfrac{1}{16}H^2 - \tfrac{1}{2}d^2}$$

für die Höhe

3) $$h = \sqrt{x^2 + d^2} = \sqrt{\tfrac{1}{8}H^2 + \tfrac{1}{2}d^2 \pm \tfrac{1}{2}H\sqrt{(\tfrac{1}{16}H^2 - \tfrac{1}{2}d^2)}}$$

für die kleinere Kathete

4) $$k = \sqrt{H.x} = \sqrt{\tfrac{1}{4}H^2 \pm H\sqrt{(\tfrac{1}{16}H^2 - \tfrac{1}{2}d^2)}}$$

für die größere Kathete

5) $$K = \sqrt{H.(H-x)} = \sqrt{\tfrac{3}{4}H^2 \mp H\sqrt{(\tfrac{1}{16}H^2 - \tfrac{1}{2}d^2)}}$$

Construction nach der ersten Formel und für ein rechtwinkliges Dreieck mit kleinerem Abschnitt. Die Hypotenuse sey BC, die Seite des Unterschieds-Quadrates GF. Man beschreibe über der Hypotenuse BC den Halbkreis BAC, suche den vierten Theil der Hypotenuse $\frac{1}{4}H = BG$, lege auf der Linie BC an den Punkt G die Quadratseite GF und ihre Hälfte GK, beschreibe über KF einen Halbkreis KEF und errichte in dem Punkte G die senkrechte Linie GE bis zum Durchschnitte der Peripherie des Halbkreises KEF und trage von E aus den vierten Theil der Hypotenuse $ED = \frac{1}{4}H$ an, so ist BD der kleinere Abschnitt und DC der größere im Dreieck BAC. Errichtet man in dem Punkte D eine senkrechte Linie bis zum Durchschnitte A mit der Peripherie des Halbkreises BAC und zieht BA und AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Anmerkung. Die Formel für das Dreieck mit größerer Höhe und größerem Abschnitte construirt sich leicht, wenn man die Linie ED' auf der entgegengesetzten Seite von EG anträgt, und es ist alsdann $BD = BG + GD' = \frac{1}{4}H + \sqrt{(\frac{1}{4}H)^2 - \frac{1}{2}d^2}$. Das rechtwinklige Dreieck, wozu man in diesem Falle geführt wird, ist BA'C.

Die Aufgabe ist bestimmt, wenn der kleinere Abschnitt dem vierten Theile der Hypotenuse gleich wird.

Zusatz. Wird die Aufgabe vorgelegt, aus der Hypotenuse und dem Unterschiede zwischen den Quadraten der Höhe und des größeren Abschnittes ein rechtwinkliges Dreieck zu bestimmen, so führt eine ähnliche Analysis zu folgenden Bestimmungen für den größern Abschnitt

$$x = A = \tfrac{1}{4}H + \sqrt{\tfrac{1}{2}D^2 + (\tfrac{1}{4}H)^2}$$

für den kleinern Abschnitt

$$y = H - x = \tfrac{3}{4}H - \sqrt{\tfrac{1}{2}D^2 + \tfrac{1}{16}H^2}$$

für die größere Kathete

$$K = \sqrt{H \cdot A} = \sqrt{\tfrac{1}{4}H^2 + H\sqrt{(\tfrac{1}{2}D^2 + \tfrac{1}{16}H^2)}}$$

u. s. w.

Jede dieser Formeln führt auf ein bestimmtes rechtwinkliges Dreieck.

§. 136.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und der Ueberschuß

der größern Kathete über den nicht anliegenden Abschnitt gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 150.

Analysis. Die Hypotenuse sey H, der Ueberschuß der Kathete über den nicht anliegenden Abschnitt sey d. Nennt man den kleinern Abschnitt x, so ist der größere $H - x$, und die größere Kathete $x + d$.

Da nun die größere Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte ist, so fließt hieraus folgende Gleichung

$$(x + d)^2 = H(H - x)$$

Die Entwicklung dieser Gleichung führt zu folgender

$$x^2 + (2d + H)x = H^2 - d^2$$

oder $(x + \frac{1}{2}H + d)^2 = H^2 - d^2 + (\frac{1}{2}H + d)^2$

und hieraus findet man für den kleineren Abschnitt folgende Gleichung

1) $x = a = \sqrt{H^2 - d^2 + (\frac{1}{2}H + d)^2} - \frac{1}{2}H - d$

oder $a = \sqrt{\frac{5}{4}H^2 + Hd} - \frac{1}{2}H - d$

$= \sqrt{(\frac{1}{4}H + d)H} - \frac{1}{2}H - d$

für den größern folgende

2) $A = H - x = \sqrt{(\frac{1}{4}H + d)H} + \frac{1}{2}H - d$

für die größere Kathete

3) $K = \sqrt{H \cdot A} = \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - Hd + H\sqrt{[(\frac{1}{4}H + d)H]}}$

für die kleinere Kathete

4) $k = \sqrt{x \cdot H} = \sqrt{[H\sqrt{(\frac{1}{4}H + d)H} - \frac{1}{2}H^2 - Hd]}$

für die Höhe

5) $h = \sqrt{x(H - x)} = \sqrt{H^2 + d^2 + dH - 2d\sqrt{[(\frac{1}{4}H + d)H]}}$

Construction nach der Gleichung 1. Der Unterschied sey EF, die Hypotenuse BC. Man verlängere die Hypotenuse BC und trage auf ihrer Verlängerung die Linie $BG = FG = \frac{1}{4}H$ an, und an F den gegebenen Unterschied FE, ferner schneide man von C aus die Linie $CK = \frac{1}{4}H$ ab; beschreibe über EK einen Halbkreis EHK und errichte in dem Punkte G die Linie GH senkrecht bis zum Durchschnitte H der Peripherie

und ziehe die Linie HK; diese Linie trage man von E aus auf EK ab, so daß ED = EK sey, so ist BD der gesuchte Abschnitt. Nun beschreibe man über der Hypotenuse einen Halbkreis, errichte in dem Punkte D die Linie DA bis zum Durchschnitte A mit der Peripherie des Halbkreises, ziehe die Linie AB und AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Anmerkung. Ist die Hypotenuse und der Ueberschuß des größern Abschnittes über die kleinere Kathete, oder der kleinern Kathete über den größern Abschnitt gegeben; so läßt sich durch eine ähnliche Analysis die Auflösung gewinnen.

§. 137.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und der Unterschied zwischen den Quadraten der größern Kathete und des nicht anliegenden Abschnittes gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 151.

Analysis. Nennt man die Hypotenuse H, das Unterschiedsquadrat d^2, den kleinern Abschnitt x, so ist der größere Abschnitt H − x, und das Quadrat der größern Kathete

$$H^2 = x^2 + d^2$$

Da nun die größere Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem größern Abschnitte ist, so ergibt sich hieraus folgende Gleichung

$$x^2 + d^2 = H(H - x) = H^2 - Hx$$

und hieraus $x^2 + Hx = H^2 - d^2$

oder $(x + \frac{1}{2}H)^2 = H^2 - d^2 + \frac{1}{4}H^2$.

und hieraus für den kleinern Abschnitt

1) $x = \sqrt{\frac{1}{4}H^2 - d^2} - \frac{1}{2}H$

für den größern Abschnitt

2) $H = H - x = \frac{1}{2}H - \sqrt{\frac{1}{4}H^2 - d^2}$

für die größere Kathete

3) $K = \sqrt{x^2 + d^2} = \sqrt{\frac{1}{2}H^2 - H\sqrt{(\frac{1}{4}H^2 - d^2)}}$

für die kleinere Kathete

4) $k = \sqrt{H \cdot x} = \sqrt{H\sqrt{(\frac{1}{4}H^2 - d^2} - \frac{1}{4}H^2)}$

für die Höhe

5) $h = \sqrt{x\,(H - x)} = \sqrt{d^2 - 2H^2 + H\sqrt{(\frac{5}{4}H^2 - d^2)}}$

Construction nach der Gleichung 2. Die Hypotenuse sey BC, die Seite des Unterschieds-Quadrates EG. Man beschreibe über der Hypotenuse einen Halbkreis BAC, verlängere sie um ihre Hälfte EB und errichte auf dem Endpunkte E die Hypotenuse BC = EF senkrecht und ziehe die Linie BF. Nun trage man auf die Linie EF, die Seite des Unterschiedsquadrates EG auf und beschreibe von dem Punkte G mit der Linie FB = GD einen Kreisbogen, welcher die Hypotenuse BC in einem Punkte D durchschneiden wird, so sind BD und DC die Abschnitte des gesuchten rechtwinkligen Dreiecks. Aus ihnen läßt sich leicht das Dreieck ABC bilden.

Anmerkung. Durch eine ähnliche Analysis läßt sich die Aufgabe: ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn die Hypotenuse und das Unterschieds-Quadrat zwischen der kleinern Kathete und dem größern Abschnitt gegeben ist, lösen.

§. 138.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und der Unterschied zwischen der Kathete und dem anliegenden Abschnitte gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 152.

Analysis. Nennt man die Hypotenuse H, den Unterschied zwischen Kathete und Abschnitt d, den Abschnitt selbst x, so ist die Kathete $x + d$, und hieraus fließt, da die Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt ist,

$$(x + d)^2 = x \cdot H$$

oder $$x^2 + 2dx + d^2 = Hx$$

und hieraus $$[x - (\tfrac{1}{2}H - d)]^2 = (\tfrac{1}{2}H - d)^2 - d^2$$

also $$x = \tfrac{1}{2}H - d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}H - d)^2 - d^2}$$

Unterſucht man die Größe der Kathete und des anliegenden Abſchnittes gegen einander näher, ſo entnimmt ſich leicht, daß die Aufgabe beſtimmt iſt, wenn über der gegebenen Hypotenuſe ein rechtwinkliges Dreieck von größerm Abſchnitte gebildet werden ſoll, denn in dieſem Fall muß x größer als die halbe Hypotenuſe, alſo auch größer, als die, um den gegebenen Unterſchied verminderte Hälfte der Hypotenuſe ſeyn muß. Daher muß in dieſem Falle das Wurzelzeichen mit dem poſitiven Zeichen verſehen ſeyn. Die Aufgabe kann unbeſtimmt ſeyn, wenn ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden ſoll, das einen kleinern Abſchnitt enthalten ſoll; denn alsdann genügen beide Zeichen der Aufgabe und es können zwei verſchiedene Dreiecke entſtehen, welche gleichen Unterſchied zwiſchen Kathete und Abſchnitt haben.

Nach dieſen Bemerkungen ergeben ſich folgende Beſtimmungen für den größern Abſchnitt

1) $A = x = \frac{1}{2}H - d + \sqrt{(\frac{1}{2}H - d)^2 - d^2}$

für den kleinern

2) $a = H - x = \frac{1}{2}H + d - \sqrt{(\frac{1}{2}H - d)^2 - d^2}$

für die größere Kathete

3) $K = x + d = \frac{1}{2}H + \sqrt{(\frac{1}{2}H - d)^2 - d^2}$

für die kleinere Kathete

4) $k = \sqrt{H(H-x)} = \sqrt{\frac{1}{4}H^2 + Hd - H\sqrt{[(\frac{1}{2}H - d)^2 - d^2)]}}$

für die Höhe

5) $h = \sqrt{x(H-x)} = \sqrt{\frac{1}{4}H^2 - d^2 + 2d\sqrt{[(\frac{1}{2}H - d)^2 - d^2]}}$

Conſtruction nach der Formel 1 und 2. Die Hypotenuſe ſey BC, der Unterſchied ME. Man beſchreibe über BC einen Halbkreis BAC, und ſchneide von dem Mittelpunkte M den Unterſchied ME auf BC ab, errichte in E den gegebenen Unterſchied EF = ME ſenkrecht und beſchreibe von F mit der Linie EC als Radius einen Kreisbogen, welcher die Hypotenuſe in dem Punkte D durchſchneidet, ſo ſind BD und DC die Abſchnitte des geſuchten Dreiecks. Errichtet man in dem Punkte D die Linie DA ſenkrecht bis zum Durchſchnitte A der Peripherie des Halbkreiſes und zieht AB und AC, ſo iſt BAC das geſuchte rechtwinklige Dreieck.

§. 139.

Aufgabe. Es ist die eine Kathete und die Summe der Hypotenuse und anderen Kathete gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 153.

Erste Auflösung. Die Kathete sey AC, die Summe der Hypotenuse und andern Kathete AD. Man bilde aus beiden Linien, als Katheten nach §. 74., das rechtwinklige Dreieck ADC, halbire dessen Hypotenuse DC und errichte in ihrem Mittelpunkte E die Linie EB senkrecht und verlängere sie bis zum Durchschnitte B der Summenlinie, ziehe BC, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke BED und BEC congruent, folglich ist die Linie BC = BD, und also auch BC + BA = DB + BA = AD
Das Dreieck ABC ist wegen des rechten Winkels bei A rechtwinklig, hat die gegebene Kathete AC und eine Hypotenuse und Kathete, deren Summe der gegebenen Linie AD gleich ist und erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung.

Analysis. Nennt man die eine Kathete k, die Summe der Hypotenuse und andern Kathete S, und die in der gegebenen Summe enthaltene Kathete x, so ist die Hypotenuse S — x. Hieraus fließt nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$k^2 + x^2 = (S - x)^2$$
$$= S^2 - 2Sx + x^2$$

und hieraus bestimmt sich die gesuchte Kathete durch folgende Gleichung

1) $$x = \frac{S^2 - k^2}{2S}$$

oder

$$x = \frac{(S + k)(S - k)}{2S}$$

die Hypotenuse durch folgende

2) $$H = S - x = S - \frac{S^2 - k^2}{2S}$$
$$= \frac{S^2 + k^2}{2S}$$

Dieſe Formeln führen zu neuen Auflöſungen nach den Lehren des zweiten Kapitels.

§. 140.

Aufgabe. Es iſt eine Kathete und die Summe des Quadrates der Hypotenuſe und der andern Kathete gegeben. Man ſoll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 154.

Analyſis. Nennt man die eine Kathete K, die Seite des Summenquadrates S, die darin enthaltene zweite Kathete x, ſo ergibt ſich für das Quadrat der Hypotenuſe H folgende Gleichung $H^2 = S^2 - x^2$

und hieraus nach dem pythagoräiſchen Lehrſatze

$$S^2 - x^2 = x^2 + K^2$$

alſo $2x^2 = S^2 - K^2$

und hieraus gewinnt man für die geſuchte Kathete folgende

Formel 1) $x = \sqrt{\frac{1}{2}(S^2 - K^2)}$

für die Hypotenuſe

2) $H = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{S^2 - \frac{1}{2}(S^2 - K^2)}$

oder $H = \sqrt{\frac{1}{2}(S^2 + K^2)}$

Conſtruction des Dreiecks nach der Gleichnng 2. Die eine Kathete ſey AC, die Seite des Summenquadrates, der Hypotenuſe und der andern Kathete DG. Man trage auf eine gerade Linie die Hälften beider $ED = \frac{1}{2}AC$ und $DF = \frac{1}{2}DG$, errichte in ihren Endpunkten die Linien ſelbſt ſenkrecht, ſo daß $EB = ED$ und $CF = DF$ iſt und verbinde die beiden Punkte B und C durch eine gerade Linie BC mit einander, ſo iſt BC die geſuchte Hypotenuſe. Ueber ihr läßt ſich leicht das geſuchte rechtwinklige Dreieck BAC bilden, wenn man einen Halbkreis BAC beſchreibt und in ihn als Sehne die gegebene Kathete CA trägt und die zweiee Kathete AB zieht.

Beweis. Man ziehe die Linien BD und DC, ſo ſind die beiden Dreiecke BED und DCF rechtwinklig und gleichſchenklig, folglich die Winkel $CDF = \frac{1}{2}R$ und $BDE = \frac{1}{2}R$, alſo beide Winkel einem rechten gleich

$$BDE + CDF = R$$

Der Winkel $BDC = 2R - (BDE + CDF)$
$= 2R - R = R$
also ist auch das Dreieck BDC rechtwinklig.

Berücksichtigt man nun, daß $DF = FC = \frac{1}{2}S$ und $DE = EB = \frac{1}{2}R$, so fließt aus diesen Bemerkungen folgendes

$DC^2 = DF^2 + FC^2 = \frac{1}{4}S^2 + \frac{1}{4}S^2 = \frac{1}{2}S^2$
$BD^2 = BE^2 + ED^2 = \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{4}R^2 = \frac{1}{2}R^2$

und hieraus, da BC die Hypotenuse des Dreiecks BDC ist,

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}S^2 + \tfrac{1}{2}R^2}$$

Es ist also BC die gesuchte Hypotenuse und BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

§. 141.

Aufgabe. Es ist die eine Kathete und der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der andern Kathete gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 155.

Erste Auflösung. Die gegebene Kathete sey BC, der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der andern sey BD. Man errichte auf dem Endpunkte B des Unterschiedes BD die gegebene Kathete BC senkrecht; verlängere die Linie DB nach A zu, verbinde die beiden Punkte D und C durch die gerade Linie DC, halbire die Linie DC in M und errichte auf dem Mittelpunkte M eine senkrechte Linie, welche genugsam verlängert, die Linie DA in dem Punkte A schneidet, und vollende das Dreieck BCA, so ist dieses Dreieck das gesuchte.

Beweis. Vermöge der Construction ist die Linie DM = MC; die Linie MA und CB senkrecht aufgestellt. Es sind also die Winkel r, r', x, x' rechte Winkel und einander gleich. Da nun die Linien MD = MC und MA = MA, der Winkel r = r' ist, so sind die beiden Dreiecke MDA und MCA congruent und folglich die Linien DA und CA einander gleich. Die Linie BA = AD — DB, oder da AD = AC ist, BA = CA — DB. Nun ist der Winkel x' ein rechter, CA die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreiecke CBA; hieraus folgt also, daß das Dreieck BCA ein rechtwinkliges Dreieck

ist, welches die Linie BC als Kathete enthält, und worin die Hypotenuse um den gegebenen Unterschied DB größer als die Kathete BA ist. Das Dreieck ABC entspricht also den aufgestellten Bedingungen.

Zweite Auflösung. Nennt man die gegebene Kathete K, den Unterschied zwischen der Hypotenuse und der andern Kathete d, die unbekannte Kathete selbst aber x, so ist die Hypotenuse $x + d$ und hieraus fließt nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$(x + d)^2 = K^2 + x^2$$

Wird sie entwickelt, so entsteht

$$x^2 + 2xd + d^2 = K^2 + x^2$$

und hieraus $2dx = K^2 - d^2$

Man gewinnt also für die gesuchte Kathete folgende Gleichung

1) $$x = \frac{K^2 - d^2}{2d} = \frac{(K^2 + d)(K - d)}{2d}$$

für die Hypotenuse aber

$$H = x + d = d + \frac{K^2 - d^2}{2d} = \frac{K^2 + d^2}{2d}$$

Aus diesen Formeln kann man vermittelst der beiden gegebenen Linien noch andere Auflösungen ableiten.

§. 142.

Aufgabe. Es ist die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und die Summe der beiden Katheten gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 156.

Analysis. Die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete sey S, die Summe der beiden Katheten sey s, Nennt man die in der Summe S (Hypotenuse und Kathete) enthaltene Kathete $k = x$, so ergeben sich hieraus folgende Gleichungen:

1) für die Hypotenuse $H = S - x$,

2) für die andere Kathete $K = s - x$

und hieraus fließt nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung $(S - x)^2 = x^2 + (s - x)^2$

Der Winkel $BDC = 2R - (BDE + CDF)$
$= 2R - R = R$
also ist auch das Dreieck BDC rechtwinklig.

Berücksichtigt man nun, daß $DF = FC = \frac{1}{2}S$ und $DE = EB = \frac{1}{2}K$, so fließt aus diesen Bemerkungen folgendes

$$DC^2 = DF^2 + FC^2 = \tfrac{1}{4}S^2 + \tfrac{1}{4}S^2 = \tfrac{1}{2}S^2$$
$$BD^2 = BE^2 + ED^2 = \tfrac{1}{4}K^2 + \tfrac{1}{4}K^2 = \tfrac{1}{2}K^2$$

und hieraus, da BC die Hypotenuse des Dreiecks BDC ist,

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}S^2 + \tfrac{1}{2}K^2}$$

Es ist also BC die gesuchte Hypotenuse und BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

§. 141.

Aufgabe. Es ist die eine Kathete und der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der andern Kathete gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 155.

Erste Auflösung. Die gegebene Kathete sey BC, der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der andern sey BD. Man errichte auf dem Endpunkte B des Unterschiedes BD die gegebene Kathete BC senkrecht; verlängere die Linie DB nach A zu, verbinde die beiden Punkte D und C durch die gerade Linie DC, halbire die Linie DC in M und errichte auf dem Mittelpunkte M eine senkrechte Linie, welche genugsam verlängert, die Linie DA in dem Punkte A schneidet, und vollende das Dreieck BCA, so ist dieses Dreieck das gesuchte.

Beweis. Vermöge der Construction ist die Linie DM = MC; die Linie MA und CB senkrecht aufgestellt. Es sind also die Winkel r, r', x, x' rechte Winkel und einander gleich. Da nun die Linien MD = MC und MA = MA, der Winkel r = r' ist, so sind die beiden Dreiecke MDA und MCA congruent und folglich die Linien DA und CA einander gleich. Die Linie BA = AD — DB, oder da AD = AC ist, BA = CA — DB. Nun ist der Winkel x' ein rechter, CA die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreiecke CBA; hieraus folgt also, daß das Dreieck BCA ein rechtwinkliges Dreieck

Die Linie GK = KD = S − s und die Linie

$$KD = GD - GK = \sqrt{S \cdot 2(S-s)} - (S-s)$$

also ist KD = CD die gesuchte Kathete und

$$BC = BD - CD = S - x = H$$

die gesuchte Hypotenuse. Aus diesen Linien ist das Dreieck ABC construirt und ist also das gesuchte.

Zweite Auflösung.

Analysis. Es sey, wie vorhin, die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete S, die der beiden Katheten s. Nennt man die Hypotennse x, und die eine Kathete y, so ergeben sich folgende Gleichungen:

1) für die eine Kathete

$$y = S - x,$$

2) für die zweite Kathete, die sich durch die Hypotenuse und die eine Kathete darstellen läßt

$$K = \sqrt{x^2 - y^2}$$

3) für die Summe der beiden Katheten

$$y + \sqrt{x^2 - y^2} = s$$

Wird der Werth aus 1 in die letzte Gleichung eingeführt, so entsteht $S - x + \sqrt{x^2 - (S-x)^2} = s$

oder $x^2 - (S-x)^2 = (s - S + x)^2$

Werden die hier angedeuteten Quadrate entwickelt und die Gleichung aufgelöset, so gewinnt man die nämlichen Werthe, wie oben.

Dritte Auflösung.

Analysis. Die Summe der Hypotenuse und der kleineren Kathete sey S, die Summe der beiden Katheten s, die größere Katheten K, die kleinere k, die Hypotenuse H, die Differenz zwischen der Hypotenuse und kleinern Kathete x. Da sich zwei Größen durch ihre Summe und Differenz bestimmen lassen, so gewinnt man folgende Gleichungen:

für die Hypotenuse, als den größern Theil

1) $H = \frac{1}{2}(S + x)$

für die Kathete, als den kleinern Theil

2) $k = \frac{1}{2}(S - x)$

Aus der kleinern Kathete und der Summe der beiden Katheten ergibt sich sofort auch für die größere Kathete folgende Gleichung

$$3)\quad H = s - \tfrac{1}{2}(S - x)$$
$$= \tfrac{1}{2}(2s - S + x)$$

Hieraus bestimmt sich nun nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$\tfrac{1}{2}(S + x)^2 = \tfrac{1}{2}(S - x)^2 + \tfrac{1}{2}(2s - S + x)^2$$

Werden die angedeuteten Geschäfte entwickelt, die Gleichung aufgelöst, so ergibt sich

$$3S - 2s \pm 2\sqrt{2S\,(S - s)} = x$$

Aus dem entwickelten Unterschiede x geht man nach der Gleichung 1 auf die Hypotenuse dadurch zurück, daß man von dieser Gleichung die Hälfte nimmt und $\frac{1}{2}S$ dazu zählt. Hierdurch entsteht

$$H = \tfrac{1}{2}(S + x) = 2S - s - \sqrt{2S\,(S - s)}$$

u. s. w.

§. 143.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und das Summen-Quadrat der Hypotenuse und einen Kathete gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 157.

Erste Auflösung. Die Hypotenuse sey BC, die Seite des Summenquadrates CD. Man beschreibe über der gegebenen Hypotenuse einen Halbkreis BAC, errichte an ihrem Endpunkte B eine senkrechte Linie und lege von C aus die Quadratseite CD so an, daß sie die senkrechte Linie BD mit ihrem Endpunkte D treffe; trage die Linie BD und BA, als Sehne, in den Halbkreis BAC, ziehe AD, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Da die Linie CD das Summenquadrat für die Hypotenuse und die eine Kathete ist, so findet man die in ihr enthaltene Kathete, wenn man aus DC als Hypotenuse und BC als Kathete ein rechtwinkliges Dreieck bildet, denn es ist alsdann $BD = \sqrt{DC^2 - BC^2}$

Ist die Kathete BD gefunden, so läßt sich auch leicht das gesuchte Dreieck bilden, wenn man BA = BD macht, und so fort das Dreieck BAC vollendet, welches rechtwinklig ist, und die aufgestellten Bedingungen der Aufgabe erfüllt, da in ihm

$$BC^2 + BA^2 = BC^2 + DB^2 = DC^2$$ ist.

Zweite Auflösung. Nennt man die Hypotenuse H, das Summenquadrat der Hypotenuse und der einen Kathete S^2, die darin enthaltene Kathete x, so gewinnt man folgende Gleichung $H^2 = S^2 - x^2$

und hieraus zur Bestimmung der einen Kathete folgende

$$1)\quad x = \sqrt{S^2 - H^2}$$

die andere Kathete aber folgende

$$2)\quad K = \sqrt{H^2 - x^2} = \sqrt{2H^2 - S^2}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich in Verbindung mit der Hypotenuse noch andere Constructionen gewinnen.

§. 144.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der einen Kathete und die Summe der beiden Katheten gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 158.

Analysis. Der Unterschied zwischen der Hypotenuse und größern Kathete sey d, die Summe der beiden Katheten sey S. Nennt man die größere Kathete x, so ergeben sich hieraus folgende Gleichungen:

für die Hypotenuse

$$1)\quad H = x + d$$

für die kleinere Kathete

$$2)\quad k = S - x$$

und hieraus nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$(x + d)^2 = x^2 + (S - x)^2$$

Werden die angedeuteten Quadrate entwickelt, so entsteht

$$d^2 - S^2 = x^2 - 2(S + d)x$$

oder $d^2 - S^2 + S^2 + 2dS + d^2 = [x - (S + d)]^2$

Dieß führt zu folgender Auflösung

$$S + d \pm \sqrt{2d^2 + 2dS} = x.$$

Da das Wurzelzeichen das positive oder auch das negative Zeichen vor sich haben kann, so fragt es sich, welches von beiden ihm zugehören muß? Diese Frage entscheidet sich leicht, wenn man berücksichtigt, daß die eine Kathete kleiner seyn muß, als die Summe beider und der Unterschied aus der Hypotenuse und der nämlichen Kathete, daher muß das Wurzelzeichen mit dem negativen Zeichen versehen seyn und demnach gilt folgende Gleichung für die Kathete

3) $x = S + d - \sqrt{2d(S + d)}$

und für die Hypotenuse, wenn der gegebene Unterschied zugezählt wird

4) $H = x + d = 2d + S - \sqrt{2d(S + d)}$

Construction. Die Summe der beiden Katheten sey BE, der Unterschied zwischen der Hypotenuse und Kathete ED. Man verbinde beide zu der geraden Linie BD, und verlängere diese um den doppelten Unterschied DF = 2 DE, beschreibe über BF einen Halbkreis, und errichte in dem Punkte D die Linie DG senkrecht bis zum Durchschnitt G der Peripherie des Halbkreises, schneide diese Linie DG = CD von BD ab; so sind die Linien BC und CE die beiden Katheten. Aus ihnen läßt sich leicht nach §. 74. das rechtwinkliges Dreieck ABC bilden, welches das gesuchte ist.

Zweite Analysis. Nimmt man die Hypotenuse als unbekannt an und nennt sie x, so gewinnt man folgende Gleichungen:

für die größere Kathete

1) $K = x - d$

für die kleinere Kathete

2) $k = S - K = S - x + d$

und hieraus ergibt sich nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$x^2 = (x - d)^2 + (S - x + d)^2$$

Wird diese Gleichung entwickelt, so führt sie zu folgender Gleichung $\sqrt{2d^2 + 2Sd} = x - (S + 2d)$

oder $S + 2d \pm \sqrt{2d(d + S)} = x$

also zu dem nämlichen Resultat, wie oben.

Dritte Analysis. Nennt man die Hypotenuse x, die größere Kathete y, so ergeben sich folgende Gleichungen:

für die Hypotenuse

1) $x = d + y$

für die größere Kathete

2) $y = x - d$

für die kleinere Kathete

3) $k = \sqrt{x^2 - y^2}$

für die Summe der beiden Katheten

$$S = y + \sqrt{x^2 - y^2}$$

Wird in dieser Gleichung $y = x - d$ eingeführt, so entsteht

$$S = x - d + \sqrt{x^2 - (x - d)^2}$$

oder $$S - x + d = \sqrt{2dx + d^2}$$

Wird diese Gleichung aufgelöset, so entsteht, wie oben

$$x = S + 2d \pm \sqrt{2d\,(d + S)}$$

§. 145.

Aufgabe. Es ist die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und der Unterschied zwischen beiden Katheten gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 159.

Analysis. Die Summe der Hypotenuse und der größeren Kathete sey S, der Unterschied zwischen beiden Katheten d, die größere Kathete sey x. Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen:

für die Hypotenuse

1) $H = S - x$

für die kleinere Kathete

2) $k = x - d$

und hieraus nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$(S - x)^2 = x^2 + (x - d)^2$$

Werden die angedeuteten Geschäfte entwickelt, so erhält man

$$S^2 - d^2 = x^2 + 2(S - d)\,x$$

oder durch Zuzählen von $(S - d)^2$

$$S^2 - d^2 + (S - d)^2 = (x + S - d)^2$$

und hieraus $$-S + d \pm \sqrt{S^2 - d^2 + (S - d)^2} = x$$

Das Wurzelzeichen muß, wie sich leicht ergibt, mit dem positiven Zeichen versehen seyn, denn offenbar ist die Summe der Hypotenuse und größern Kathete größer als der Unterschied beider Katheten. Würde daher das Wurzelzeichen ein negatives Zeichen haben, so würde x eine negative Größe werden, was unmöglich wäre. Daher ergibt sich für die größere Kathete folgende Gleichung:

$$1)\quad x = \sqrt{S \cdot 2(S - d)} - (S - d)$$

für die Hypotenuse folgende

$$2)\quad H = S - x = S + (S - d) - \sqrt{S \cdot 2(S - d)}$$

Construction. Die Summe der Hypotenuse und größern Kathete sey EC, der Unterschied EF. Man trage die Linie FC doppelt aneinander, wodurch GC entsteht, und beschreibe über ihr den Kreisbogen GHC, errichte auf dem Endpunkte E der Summenlinie die Linie EH senkrecht bis zum Durchschnitte H der Peripherie des Kreisbogens, ziehe die Linie HC und schneide von H die Linie HK = FC ab, so ist KC die gesuchte Kathete. Trägt man nun die KC = BC auf EC auf, so ist BC die größere Kathete und EB die Hypotenuse. Aus beiden läßt sich das Dreieck ABC bilden, welches das gesuchte ist.

Zweite Auflösung.

Analysis. Nimmt man unter den nämlichen Bedingungen und Bezeichnungen die Differenz der Hypotenuse und größern Kathete als die zu suchende Größe an und nennt sie x, so ergeben sich folgende Gleichungen:

für die Hypotenuse, als die größere Linie,

$$1)\quad H = \tfrac{1}{2}(S + x)$$

für die größere Kathete

$$2)\quad K = \tfrac{1}{2}(S - x)$$

aus der größern Kathete leitet sich die kleinere Kathete, leicht ab, wenn die gegebene Differenz abgezogen wird.

$$3)\quad k = \tfrac{1}{2}(S - x) - d$$

und hieraus ergibt sich nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$\tfrac{1}{4}(S + x)^2 = \tfrac{1}{4}(S - x)^2 + \tfrac{1}{4}(S - x - 2d)^2$$

Wird diese Gleichung entwickelt und aufgelöset, so gewinnt man

$$3S - 2d - 2\sqrt{2S(S - d)} = x$$

Wird diese Gleichung mit 2 gemessen und ihr $\frac{1}{2}S$ zugezählt, so erhält man nach 1 die Hypotenuse in folgendem Ausdrucke

$$H = \tfrac{1}{2}(S + x) = 2S - d - \sqrt{2S(S-d)}$$

und die Kathete

$$K = -S + d + \sqrt{2S(S-d)}$$
$$= -S + d + \sqrt{S^2 - d^2 + (S-d)^2}$$

Anmerkung. Ist die Summe der Hypotenuse und kleinern Kathete und der Unterschied der beiden Katheten gegeben, und soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden, so führt folgende Analysis zum Ziele.

Nennt man die Summe der Hypotenuse und kleinern Kathete S, den Katheten-Unterschied d, die kleinere Kathete x, so ist die größere $x + d$ und die Hypotenuse $H - x$ und hieraus gewinnt man nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$(S - x)^2 = x^2 + (x + d)^2$$

Ihre Entwickelung führt zu folgender

$$S^2 - 2Sx + x^2 = 2x^2 + 2dx + d^2$$

oder $S^2 - d^2 + (S + d)^2 = (x + S + d)^2$

und hieraus bestimmt sich die kleinere Kathete durch folgende Gleichung

1) $$x = \sqrt{S^2 - d^2 + (S + d)^2} - (S + d)$$
$$= \sqrt{2S(S + d)} - (S + d)$$

die Hypotenuse

2) $$H = S - x = 2S + d - \sqrt{2S(S + d)}$$

die größere Kathete

3) $$K = x + d = \sqrt{2S(S + d)} - S$$

Diese Formeln führen zu einer ähnlichen Construction, wie die oben §. angegebene.

§. 146.

Aufgabe. Es ist die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und der Unterschied der Quadrate beider Katheten gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 160.

Analysis. Nennt man die Summe der Hypotenuse und größern Kathete S, den Quadrat-Unterschied d^2, die größere

Kathete x, so ist die Hypotenuse S — x, das Quadrat der kleinere Kathete $k^2 = x^2 - d^2$

Hieraus ergibt sich nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung $(S - x)^2 = x^2 + x^2 - d^2$

durch die Entwicklung von $(S - x)^2$ folgende

$$S^2 + d^2 = x^2 + 2Sx$$

oder $$2S^2 + d^2 = (x + S)^2$$

und dieß führt für die größere Kathete zu folgender Bestimmung

1) $x = \sqrt{2S^2 + d^2} - S$

für die Hypotenuse

2) $H = S - x = 2S - \sqrt{2S^2 + d^2}$

für die kleinere Kathete

3) $k = \sqrt{x^2 - d^2} = \sqrt{3S^2 - 2S\sqrt{(2S^2 + d^2)}}$

Construction. Die Summe der Hypotenuse und Kathete sey BD, die Seite des Quadrat-Unterschiedes EF. Man verbinde die Summenlinie BD unter einem rechten Winkel und suche dazu die Hypotenuse ED, errichte in ihrem Endpunkte E die Seite des Unterschieds-Quadrates EF senkrecht und ziehe FD, von dem Punkte F aus schneide man die Summenlinie BD = FG auf FD ab, so ist GD die größere Kathete. Macht man nun CD = GD, so ist BC die Hypotenuse; beschreibt man über BC einen Halbkreis BAC, trägt AC = CD, als Sehne, ein und zieht AB, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Anmerkung. Ist die Summe der Hypotenuse und kleinern Kathete und der Unterschied der Katheten-Quadrate gegeben, und soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden, so führt folgende Analysis zum Ziele.

Nennt man die Summe S, den Unterschied der Katheten-Quadrate d^2, die kleinere Kathete x, so ist die Hypotenuse S — x, das Quadrat der größern Kathete $x^2 + d^2$ und hieraus gewinnt man nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$(S - x)^2 = x^2 + x^2 + d^2$$

oder $$S^2 - d^2 = x^2 + 2Sx$$

und hieraus durch Zuzählen von S^2 auf beiden Seiten der Gleichung

$$(x + S)^2 = 2S^2 - d^2$$

und demnach ist die Gleichung zur Bestimmung der kleinern Kathete

1) $x = \sqrt{2S^2 - d^2} - S$

zur Bestimmung der Hypotenuse

2) $H = S - x = 2S - \sqrt{2S^2 - d^2}$

zur Bestimmung der größern Kathete

$$K = \sqrt{x^2 + d^2} = \sqrt{3S^2 - 2S\sqrt{(2S^2 - d^2)}}$$

§. 147.

Aufgabe. Es ist die Summe der Quadrate der Hypotenuse und der einen Kathete und der Unterschied der Katheten-Quadrate gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 161.

Analysis. Das Summen-Quadrat der Hypotenuse und größern Kathete sey S^2, der Unterschied der Katheten-Quadrate sey d^2. Nennt man die größere Kathete x, so ist das Quadrat der Hypotenuse

$$H^2 = S^2 - x^2$$

das Quadrat der kleinern Kathete

$$k^2 = x^2 - d^2$$

Der pythagoräische Lehrsatz liefert hieraus folgende Gleichung:

$$S^2 - x^2 = x^2 + x^2 - d^2$$

also $$3x^2 = S^2 + d^2$$

und hieraus bestimmt sich also die größere Kathete

1) $K = x = \sqrt{\frac{1}{3}(S^2 + d^2)}$

die Hypotenuse

2) $H = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{S^2 - (\frac{1}{3}S^2 + \frac{1}{3}d^2)}$

die kleinere Kathete

3) $k = \sqrt{x^2 - d^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(S^2 + d^2) - d^2}$

Construction. Die Seite der Quadratensumme sey EF und die des Unterschieds-Quadrates BE. Man verbinde beide Linien unter einem rechten Winkel und ziehe die Hypotenuse BF, so ist $$BF^2 = BE^2 + EF = S^2 + d^2$$

Nun theile man die Linie BF in drei gleiche Theile, beschreibe über ihr einen Kreisbogen BAF, errichte in dem Endpunkte D des dritten Theiles BD der Linie BF die Linie DA senkrecht bis zum Durchschnitt A des Kreisbogens und ziehe die Linien

BA und AF, so ist BA die mittlere geometrische Proportionale zwischen BF und BD $= \frac{1}{3}$BF

also $BA^2 = \frac{1}{3}BF^2 = \frac{1}{3}(S^2 + d^2)$

oder $BA = \sqrt{\frac{1}{3}(S^2 + d^2)}$

also ist nach 1. BA die gesuchte größere Kathete.

Nun beschreibe man über BA, als Hypotenuse, einen Halbkreis und trage die Linie BE $=$ BG, als Sehne, ein und ziehe die Linie AG, so ist

$$AG^2 = BA^2 - BG^2 \quad \text{oder}$$

$$AG = \sqrt{\frac{1}{3}(S^2 + d^2) - d^2}$$

Die so gefundene Linie AG ist also nach 3. die gesuchte kleinere Kathete. Macht man nun AC $=$ AG und zieht BC, so ist wegen des rechten Winkels bei A, das Dreieck BAC rechtwinklig und hat die gesuchten Katheten, entspricht also den Forderungen der Aufgabe.

Anmerkung. Ist die Summe der Quadrate der Hypotenuse und kleinern Kathete und der Unterschied der Katheten-Quadrate gegeben, und man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden, so gewinnt man, wenn S^2 das Summenquadrat und d^2 das Unterschiedsquadrat, x die kleinere Kathete bedeutet, folgende Bestimmungen für das Quadrat der Hypotenuse $H^2 = S^2 - x^2$, für das der größern Kathete $K^2 = x^2 + d^2$ und hieraus folgende Gleichung

$$S - x^2 = 2x^2 + d^2$$

Diese führt zu folgenden Bestimmungen: für die kleinere Kathete

1) $k = x = \sqrt{\frac{1}{3}(S^2 - d^2)}$

für die größere Kathete

2) $K = \sqrt{x^2 + d^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(S^2 - d^2) + d^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(S^2 - 2d^2)}$

für die Hypotenuse

3) $H = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{S^2 - \frac{1}{3}(S^2 - d^2)} = \sqrt{\frac{1}{3}(2S^2 + d^2)}$

§. 148.

Aufgabe. Der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der einen Kathete und der Unterschied zwischen beiden Katheten ist gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 162.

Analysis. Der Unterschied zwischen der Hypotenuse und

kleinern Kathete sey D, der Unterschied zwischen beiden Katheten d. Nennt man die kleinere Kathete x, so ergeben sich folgende Gleichungen:

für die Hypotenuse

$$1)\quad H = x + D,$$

für die größere Kathete

$$2)\quad K = x + d$$

und hieraus nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$(x + D)^2 = x^2 + (x + d)^2$$

Werden die Quadrate entwickelt, so entsteht

$$D^2 - d^2 = x^2 + 2(d - D)x$$
$$= x^2 - 2(D - d)x$$

und hieraus durch Zuzählen von $(D - d)^2$

$$D^2 - d^2 + (D - d)^2 = [x - (D - d)]^2$$
$$x = D - d \pm \sqrt{D^2 - d^2 + (D - d)^2}$$

Da in dieser Gleichung das Wurzelzeichen mit beiderlei Zeichen versehen seyn kann, so fragt es sich, mit welchem es versehen seyn müsse? Die Untersuchung des Werthes von D — d wird über die Beschaffenheit des Zeichens entscheiden. Führt man nämlich statt den Unterschieden D und d die Größen, von denen sie abgeleitet sind, ein, so ist

$$D = H - k$$
$$d = K - k$$

also
$$D - d = H - k - (K - k),$$
$$= H - K$$

Demnach ist also der Unterschied zwischen beiden Unterschieden dem Unterschied zwischen der Hypotenuse und größern Kathete gleich. Da nun in einem Dreiecke der Unterschied zwischen zwei Linien immer kleiner, als die dritte Linie ist, so muß es auch der Unterschied, zwischen beiden Unterschieden, als die jenem gleiche Größe seyn. Hieraus folgt also, daß D — d kleiner als x ist, und daß demnach das Wurzelzeichen mit dem positiven Zeichen versehen seyn müsse. Nach diesen Bemerkungen ergibt sich folgende Gleichung für die kleinere Kathete

$$3)\quad x = D - d + \sqrt{D^2 - d^2 + (D - d)^2}$$

für die größere nach 2.

$$4)\quad K = x + d = D + \sqrt{D^2 - d^2 + (D - d)^2}$$

für die Hypotenuse nach 1.

5) $H = x + D = 2D - d + \sqrt{D^2 - d^2 + (D-d)^2}$

Construction. Der Unterschied zwischen der Hypotenuse und kleinern Kathete sey DF, der Unterschied zwischen beiden Katheten AE. Man verbinde den Unterschied zwischen der Hypatenuse und der Kathete mit dem Unterschied FE zwischen beiden Unterschiedslinien unter einem rechten Winkel und ziehe zu beiden die Hypotenuse DE, beschreibe über dieser Hypotenuse einen Halbkreis DAE und lege den Katheten-Unterschied EA, als Sehne, von dem einen Endpunkte E aus in den Halbkreis und ziehe AD, trage an diese Linie den Unterschied zwischen beiden Unterschiedslinien EF = BD, und den Unterschied zwischen der Hypotenuse und Kathete DH = DF, so ist die Linie BA die kleinere und AH die größere Kathete. Macht man nun AC = AH und zieht BC, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist die Linie DF = D und EF = D − d, also ist

$$DE^2 = DF^2 + EF^2 = D^2 + (D-d)^2$$

ferner ist AE = d, also ist

$$AD^2 = DE^2 - AE^2$$

oder $AD = \sqrt{DE^2 - AE^2} = \sqrt{D^2 + (D-d)^2 - d^2}$

setzt man nun BD = D − d zu AD, so hat man

$$BA = BD + DA = D - d + \sqrt{D^2 + (D-d)^2 - d^2}$$

und $HA = AC = HD + AD = D + \sqrt{D^2 + (D-d)^2 - d^2}$

also ist BA die gesuchte kleinere und HA die gesuchte größere Kathete, und das Dreieck ABC entspricht den Forderungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Nimmt man unter den obigen Bedingungen die Summe der Hypotenuse und kleinern Kathete als die zu suchende Größe x an, um dann aus ihr die andere abzuleiten, so ergeben sich folgende Gleichungen

1) für die Hypotenuse, als die größere Linie,

$$H = \tfrac{1}{2}(x + D)$$

2) für die kleinere Kathete

$$k = \tfrac{1}{2}(x - D)$$

3) für die größere Kathete

$$K = \tfrac{1}{2}(x - D + 2d)$$

und hieraus nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$\tfrac{1}{4}(x + D)^2 = \tfrac{1}{4}(x + D)^2 + \tfrac{1}{4}(x - D + 2d)^2$$

Entwickelt man nun diese Gleichung, bestimmt aus ihr x, und führt den hiedurch erhaltenen Werth in die eben gewonnenen Ausdrücke für die Katheten und Hypotenuse ein, so wird man die nämlichen Gleichungen, wie in der ersten Auflösung, erhalten.

Anmerkung. Ist der Unterschied der Hypotenuse und größern Kathete und der Unterschied zwischen beiden Katheten gegeben, und man soll ein rechtwinkliges Dreieck daraus bilden, so gewinnt man wenn D den Unterschied zwischen der Hypotenuse und der größern Kathete, d den Unterschied zwischen beiden Katheten, x die größere Kathete bezeichnet, folgende Gleichungen

1) für die Hypotenuse

$$H = x + D$$

2) für die kleinere Kathete

$$k = x - d$$

und hieraus nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$(x + D)^2 = x^2 + (x - d)^2$$

Werden die angedeuteten Geschäfte entwickelt, so gewinnt man folgende Auflösung

$$D + d \pm \sqrt{D^2 - d^2 + (D + d)^2} = x$$

Die Frage: mit welchem Zeichen die Wurzelgröße versehen seyn müsse? beantwortet sich durch die Zurückführung der Unterschiede auf die Größen, von denen sie abgeleitet wurden. Es ist nämlich

$$D = H - K$$

$$d = K - k$$

Werden beide zusammen gezählt, so entsteht

$$D + d = H - k$$

Demnach ist also die Summe beider Unterschiede dem Unterschied der Hypotenuse und der kleinern Kathete gleich. Der Unterschied zwischen der Hypotenuse und kleinern Kathete ist kleiner, als die größere Kathete x. Demnach muß in der aufgefundenen Gleichung das Wurzelzeichen mit dem positiven Zeichen versehen seyn und es wird für die größere Kathete

$$3)\quad x = D + d + \sqrt{D^2 - d^2 + (D + d)^2}$$

für die kleinere

$$4)\quad k = x - d = D + \sqrt{D^2 - d^2 + (D + d)^2}$$

für die Hypotenuse nach 1.

5) $H = x + D = 2D - d + \sqrt{D^2 - d^2 + (D-d)^2}$

Construction. Der Unterschied zwischen der Hypotenuse und kleinern Kathete sey DF, der Unterschied zwischen beiden Katheten AE. Man verbinde den Unterschied zwischen der Hypotenuse und der Kathete mit dem Unterschied FE zwischen beiden Unterschiedslinien unter einem rechten Winkel und ziehe zu beiden die Hypotenuse DE, beschreibe über dieser Hypotenuse einen Halbkreis DAE und lege den Katheten-Unterschied EA, als Sehne, von dem einen Endpunkte E aus in den Halbkreis und ziehe AD, trage an diese Linie den Unterschied zwischen beiden Unterschiedslinien EF = BD, und den Unterschied zwischen der Hypotenuse und Kathete DK = DF, so ist die Linie BA die kleinere und AK die größere Kathete. Macht man nun AC = AK und zieht BC, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist die Linie DF = D und EF = D − d, also ist

$$DE^2 = DF^2 + EF^2 = D^2 + (D-d)^2$$

ferner ist AE = d, also ist

$$AD^2 = DE^2 - AE^2$$

oder $AD = \sqrt{DE^2 - AE^2} = \sqrt{D^2 + (D-d)^2 - d^2}$

setzt man nun BD = D − d zu AD, so hat man

$$BA = BD + DA = D - d + \sqrt{D^2 + (D-d)^2 - d^2}$$

und $KA = AC = KD + AD = D + \sqrt{D^2 + (D-d)^2 - d^2}$

also ist BA die gesuchte kleinere und KA die gesuchte größere Kathete, und das Dreieck ABC entspricht den Forderungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Nimmt man unter den obigen Bedingungen die Summe der Hypotenuse und kleinern Kathete als die zu suchende Größe x an, um dann aus ihr die andere abzuleiten, so ergeben sich folgende Gleichungen

1) für die Hypotenuse, als die größere Linie,

$$H = \tfrac{1}{2}(x + D)$$

2) für die kleinere Kathete

$$k = \tfrac{1}{2}(x - D)$$

die kleinere Kathete

2) $k = x^2 - d^2 = \sqrt{D^2} = D$

die Hypotenuse

3) $H = \sqrt{D^2 + D^2 + d^2} = \sqrt{2D^2 + d^2}$

Diese Formeln stimmen mit obiger Construction überein.

§. 150.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der Quadrate der Hypotenuse und kleinern Kathete und der Unterschied der Quadrate der beiden Katheten gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 164.

Erste Auflösung. Das Unterschiedsquadrat zwischen Hypotenuse und der kleinern Kathete sey AC^2, das zwischen beiden Katheten DC^2. Man beschreibe über der Quadratseite AC einen Halbkreis ADC, trage DC von C aus, als Sehne, in den Kreisbogen und ziehe AD, errichte in dem Endpunkte A die Linie AD = AB senkrecht und ziehe BC, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Die Seite des Unterschieds-Quadrates zwischen der Hypotenuse und der kleinern Kathete ist die größere Kathete des zu suchenden Dreiecks; bildet man aus ihr als Hypotenuse und der Seite des Unterschiedes der Kathetenquadrate ein rechtwinkliges Dreieck ADC, so ist AD die kleinere Kathete. Aus den Linien AC und AB, als Katheten, ist das rechtwinklige Dreieck ABC gebildet, erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Nennt man den Quadrat-Unterschied zwischen der Hypotenuse und kleinern Kathete D^2, den zwischen beiden Katheten d^2, und die kleinere Kathete x, so ist das Quadrat der Hypotenuse

$$H^2 = x^2 + D^2$$

das Quadrat der größern Kathete

$$H^2 = x^2 + d^2$$

Hieraus fließt nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung $x^2 + D^2 = x^2 + x^2 + d^2$

für die Hypotenuse

5) $H = x + D = 2D + d + \sqrt{D^2 - d^2 + (D + d)^2}$

Diese Formeln deuten auf eine ähnliche Construction, wie die oben angegebene.

§. 149.

Aufgabe. Es ist der Unterschied des Quadrates der Hypotenuse und größern Kathete und der Unterschied der Quadrate der beiden Katheten gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 163.

Auflösung. Die Unterschiedslinie der Quadrate der Hypotenuse und größern Kathete sey DA, die des Unterschiedsquadrats der beiden Katheten sey DC. Man verbinde diese Linien unter einem rechten Winkel und ziehe die Linie AC, errichte in dem Endpunkte A die Linie AB = AD senkrecht und ziehe BC, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Das Dreieck ABC ist wegen des Winkels bei A rechtwinklig, die Unterschiedslinie der Quadrate der Hypotenuse und größern Kathete ist die kleinere Kathete; sucht man daher zu ihr und dem Unterschiedsquadrate der beiden Katheten die Hypotenuse AC, so ist diese die zweite Kathete, aus beiden Linien, als Katheten, ist das Dreieck BAC gebildet und ist also das gesuchte.

Zweite Auflösung. Nennt man den Quadrat-Unterschied zwischen der Hypotenuse und größern Kathete D^2, den zwischen beiden Katheten d^2, die größere Kathete x, so ist das Quadrat der Hypotenuse

$$H^2 = D^2 + x^2$$

das Quadrat der kleinern Kathete

$$k = x^2 - d^2$$

und hieraus hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$D^2 + x^2 = x^2 + x^2 - d^2$$

also ist die größere Kathete

1) $x = \sqrt{D^2 + d^2}$

die Linie ce parallel mit CE und durch m die Linie db parallel mit DA, mache cn = ne und mb = md und ziehe bc, und die Diagonale dc. Mit dieser Diagonale ziehe man durch den Punkt D die Linie DC parallel, bis sie die Linie AE in C durchschneidet, so ist CE die gesuchte Hypotenuse. Trägt man nun CE = BC zwischen die Katheten AD und AE, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction sind die Linien gf, fk, kh, gh, kn und mg einander gleich, gf mit hk und fk mit gh, gf und ce mit CE parallel, also auch unter sich parallel, also auch hk mit ce parallel. Aus dem nämlichen Grunde ist auch gh mit mb parallel. Endlich ist der Winkel ngf = CED und mkf = ADE, also sind die Linien ng und mk zu DE, also auch unter sich parallel.

Aus diesen Bemerkungen folgt, daß die Vierecke dmkf und gnef Parallelogramme sind, worin die Linien dm und ne einander gleich sind; ebenso, daß mbhg, hknc Parallelogramme sind; worin die sämmtlichen Seiten einander gleich sind. Dieß führt zu dem Schlusse, da ne = cn ist, daß die Linien ne, cn, hc, bh, bm, md unter sich gleich sind, daß also auch

ce = bc = db

ist, und daß also dbce ein Viereck ist, worin die drei genannten Linien gleich sind.

Zieht man nun die Diagonale dc mit dieser durch den Punkt D die Linie DC parallel, so hat man die Dreiecke DCE und dce, die wegen der parallel laufenden Seite DC, dc und CE, ce einander ähnlich sind. Ebenso beweist sich leicht, daß das Dreieck DBC dem Dreiecke dbc ähnlich ist; durch ihre Zusammensetzung wird man auf die Aehnlichkeit der Vierecke dbce und DBCE und dadurch auf die Gleichheit der Seiten DB, BC, CE geführt, und es ist also

AC + BC = AC + CE = AE

und AB + BC = AB + BD = AD.

Das Dreieck ABC entspricht also den Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung.

Analysis. Die Summe der Hypotenuse und größern Kathete sey S, die Hypotenuse und kleinere Kathete sey s.

Nennt man die Hypotenuse x, so ergeben sich folgende Gleichungen:

1) für die größere Kathete

$$K = S - x$$

2) für die kleinere Kathete

$$k = s - x$$

und aus beiden nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$x^2 = (S - x)^2 + (s - x)^2$$

Werden die angedeuteten Geschäfte entwickelt, so entsteht

$$x^2 = S^2 + s^2 - 2(S + s)x + 2x^2$$

oder $$-S^2 - s^2 + (S + s)^2 = [x - (S + s)]^2$$

und hieraus $$x = S + s \pm \sqrt{2Ss}$$

Es ist ohne weitere Erörterung deutlich, daß das Wurzelzeichen mit dem negativen Zeichen versehen seyn muß. Hieraus fließt für die Hypotenuse folgende Gleichung

1) $$x = H = S + s - \sqrt{2Ss}$$

für die größere Kathete

2) $$K = s - x = \sqrt{2Ss} - S$$

für die kleinere Kathete

3) $$k = S - x = \sqrt{2Ss} - s$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich folgende einfache

Construction Fig. 166. Die Summe der Hypotenuse und kleinern Kathete sey BD, die der größern BE. Man trage beide Summenlinien in gerader Richtung von einem Punkte B aus auf einander, beschreibe über der größern BE einen Halbkreis BFE und errichte in dem Endpunkte D eine senkrechte Linie DF bis zum Durchschnitte des Halbkreises F und ziehe BF. Nun errichte man in dem Endpunkte B eine unbestimmte Linie senkrecht und beschreibe mit BF, als Radius, einen Kreisbogen HFG und ziehe HG und schneide von HG die Linie BE = HK ab, so ist GK die kleinere Kathete. Schneidet man nun KG von DB ab, so daß CD = KG ist, so ist BC die Hypotenuse. Ueber ihr läßt sich nun mit CA = CD das rechtwinklige Dreieck BAC bilden, welches das gesuchte ist.

§. 152.

Aufgabe. Es sind die Summen gegeben, welche

das Quadrat der Hypotenuse mit jedem der beiden Katheten bildet. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 167.

Analysis. Die Summe der Quadrate der Hypotenuse und größern Kathete sey S^2, die der Quadrate der Hypotenuse und kleinern Kathete s^2. Nennt man die Hypotenuse x, so hat man für das Quadrat der kleinern Kathete folgende Gleichung

$$k^2 = s^2 - x^2$$

für das der größern Kathete

$$K^2 = S^2 - x^2$$

und hieraus nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende

$$x^2 = S^2 + s^2 - 2x^2$$

Man gewinnt hieraus für die Hypotenuse folgenden Ausdruck

1) $x = \sqrt{\frac{1}{3}(S^2 + s^2)}$

für die kleinere Kathete

2) $k = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{S^2 - \frac{1}{3}(S^2 + s^2)}$
$= \sqrt{\frac{1}{3}(2S^2 - s^2)}$

für die größere Kathete

3) $K = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{S^2 - \frac{1}{3}(S^2 + s^2)}$
$= \sqrt{\frac{1}{3}(2S^2 - s^2)}$

Construction. Die Seite des gegebenen Summenquadrates der Hypotenuse und größern Kathete sey S = AB, und die des Summenquadrates der Hypotenuse und kleinern Kathete S = AC. Man stelle beide unter einem rechten Winkel zusammen und suche die Hypotenuse BC; zu dieser und ihrem dritten Theile BD suche man die mittlere geometrische Proportionale EB, so ist diese Linie die Hypotenuse. Diese Hypotenuse EB trage man von A aus auf die Linie AB, wodurch AG entsteht, und von dem Punkte G aus trage man die Linie AB so, daß ihr Endpunkt die Linie AG in F trifft, so ist die Linie AF die größere Kathete. Aus ihr und der Hypotenuse EB läßt sich nun leicht das Dreieck AFH beschreiben, welches das gesuchte ist.

Der Beweis führt sich aus der mitgetheilten Construction leicht.

Nennt man die Hypotenuse x, so ergeben sich folgende Gleichungen:

1) für die größere Kathete

$$K = S - x$$

2) für die kleinere Kathete

$$k = s - x$$

und aus beiden nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$x^2 = (S - x)^2 + (s - x)^2$$

Werden die angedeuteten Geschäfte entwickelt, so entsteht

$$x^2 = S^2 + s^2 - 2(S + s)x + 2x^2$$

oder $$-S^2 - s^2 + (S + s)^2 = [x - (S + s)]^2$$

und hieraus $$x = S + s \pm \sqrt{2Ss}$$

Es ist ohne weitere Erörterung deutlich, daß das Wurzelzeichen mit dem negativen Zeichen versehen seyn muß. Hieraus fließt für die Hypotenuse folgende Gleichung

1) $$x = H = S + s - \sqrt{2Ss}$$

für die größere Kathete

2) $$K = s - x = \sqrt{2Ss} - S$$

für die kleinere Kathete

3) $$k = S - x = \sqrt{2Ss} - s$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich folgende einfache

Construction Fig. 166. Die Summe der Hypotenuse und kleinern Kathete sey BD, die der größern BE. Man trage beide Summenlinien in gerader Richtung von einem Punkte B aus auf einander, beschreibe über der größern BE einen Halbkreis BFE und errichte in dem Endpunkte D eine senkrechte Linie DF bis zum Durchschnitte des Halbkreises F und ziehe BF. Nun errichte man in dem Endpunkte B eine unbestimmte Linie senkrecht und beschreibe mit BF, als Radius, einen Kreisbogen HFG und ziehe HG und schneide von HG die Linie BE = HK ab, so ist GK die kleinere Kathete. Schneidet man nun KG von DB ab, so daß CD = KG ist, so ist BC die Hypotenuse. Ueber ihr läßt sich nun mit CA = CD das rechtwinklige Dreieck BAC bilden, welches das gesuchte ist.

§. 152.

Aufgabe. Es sind die Summen gegeben, welche

das Quadrat der Hypotenuse mit jedem der beiden Katheten bildet. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 167.

Analysis. Die Summe der Quadrate der Hypotenuse und größern Kathete sey S^2, die der Quadrate der Hypotenuse und kleinern Kathete s^2. Nennt man die Hypotenuse x, so hat man für das Quadrat der kleinern Kathete folgende Gleichung

$$k^2 = s^2 - x^2$$

für das der größern Kathete

$$K^2 = S^2 - x^2$$

und hieraus nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende

$$x^2 = S^2 + s^2 - 2x^2$$

Man gewinnt hieraus für die Hypotenuse folgenden Ausdruck

1) $x = \sqrt{\frac{1}{3}(S^2 + s^2)}$

für die kleinere Kathete

2) $k = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{S^2 - \frac{1}{3}(S^2 + s^2)}$
$= \sqrt{\frac{1}{3}(2S^2 - s^2)}$

für die größere Kathete

3) $K = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{S^2 - \frac{1}{3}(S^2 + s^2)}$
$= \sqrt{\frac{1}{3}(2S^2 - s^2)}$

Construction. Die Seite des gegebenen Summenquadrates der Hypotenuse und größern Kathete sey $S = AB$, und die des Summenquadrates der Hypotenuse und kleinern Kathete $S = AC$. Man stelle beide unter einem rechten Winkel zusammen und suche die Hypotenuse BC; zu dieser und ihrem dritten Theile BD suche man die mittlere geometrische Proportionale EB, so ist diese Linie die Hypotenuse. Diese Hypotenuse EB trage man von A aus auf die Linie AB, wodurch AG entsteht, und von dem Punkte G aus trage man die Linie AB so, daß ihr Endpunkt die Linie AG in F trifft, so ist die Linie AF die größere Kathete. Aus ihr und der Hypotenuse EB läßt sich nun leicht das Dreieck AFH beschreiben, welches das gesuchte ist.

Der Beweis führt sich aus der mitgetheilten Construction leicht.

schied zwischen der Hypotenuse und der andern Kathete gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 170.

Analysis. Der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der größern Kathete sey d, der zwischen der Hypotenuse und der kleinern sey D, die Hypotenuse nenne man x, so ergeben sich hieraus folgende Gleichungen:

1) für die größere Kathete

$$K = x - d$$

2) für die kleinere Kathete

$$k = x - D$$

und hieraus nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$x^2 = (x - d)^2 + (x - D)^2$$

Werden die beiden Quadrate auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens entwickelt, und die bekannten Größen von den unbekannten abgesondert, so entsteht

$$-(d^2 + D^2) = x^2 - 2(d + D)x$$

und hieraus, wenn die gehörigen Reductionen vorgenommen werden, $x = d + D \pm \sqrt{2d \cdot D}$

Da die Summe der Unterschiede zwischen der Hypotenuse und den Katheten kleiner, als die Hypotenuse ist, so leuchtet es ein, daß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen mit dem positiven Zeichen versehen seyn muß. Hiernach bestimmt sich die Hypotenuse durch folgende Gleichung

3) $H = x = D + d + \sqrt{2d \cdot D}$

die größere Kathete durch folgende

4) $K = x - d = D + \sqrt{2D \cdot d}$

die kleinere durch folgende

5) $k = x - D = d + \sqrt{2d\,D}$

Construction der beiden Katheten. Die beiden Unterschiede seyen EF und EC. Man beschreibe über dem größern EF einen Halbkreis EGF und trage von dem einen Endpunkte E den kleinern Unterschied EC doppelt aneinander 2 EC = CD, errichte in dem Punkte D die Linie DG senkrecht bis zum Durchschnitt des Halbkreises G, ziehe EG und mache BE = EG,

so ist BF die eine und BC die andere Kathete. Errichtet man in dem Endpunkte B die Linie BA = BC senkrecht und zieht AF, so ist BAF das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Zweite Auflösung. Nimmt man unter den obigen Bestimmungen die Summe der Hypotenuse und der großen Kathete als bekannt an und nennt sie S, so ergeben sich folgende Gleichungen:

1) für die Hypotenuse
$$H = \tfrac{1}{2}(S + d)$$
2) für die größere Kathete
$$H = \tfrac{1}{2}(S - d)$$
3) für die kleinere Kathete
$$k = \tfrac{1}{2}(S + d) - D = \tfrac{1}{2}(S + d - 2D)$$

und hieraus nach dem pythagoräischen Lehrsatze
$$\tfrac{1}{4}(S + d)^2 = \tfrac{1}{4}(S - d)^2 + \tfrac{1}{4}(S + d - 2D)^2$$

Wird diese Gleichung entwickelt und nach den Bestimmungen 1, 2, 3 die gefundenen Werthe eingeführt, so gewinnt man die nämlichen Werthe, wie in der ersten Auflösung.

§. 156.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der beiden Abschnitte und die Summe der beiden Katheten gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 171.

Auflösung. Die Kathetensumme sey BF, der Unterschied der beiden Abschnitte BE. Man verlängere den gegebenen Unterschied und lege auf seine Verlängerung an den Punkt E den Winkel FEC = ½ R, trage die Summenlinie BF so an B an, daß ihr Endpunkt F in den Schenkel EF des eben construirten Winkels falle, halbire die Linie EF und errichte in ihrem Mittelpunkte D die Linie DA senkrecht bis zum Durchschnitte A der Linie BF, ziehe AE und mache AC = AE, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke EAM und AMF congruent, also ist der Winkel x = x'

und die Linien AE = AF. Da aber AE = AC ist, so ist auch die Linie AC = AF und folglich

$$BA + AC = BA + AF = BF$$

Es sind also die beiden Seiten BA und AC der gegebenen Summe gleich.

Fällt man von der Spitze A die Linie AD senkrecht auf BC, so wird, da das Dreieck EAC gleichschenklig ist, die Grundlinie EC in zwei gleiche Theile ED und DC getheilt, und es ist also $BE = BD - ED = BD - DC$
Die Linie BD und DC sind die Abschnitte der Grundlinie und BE ihr Unterschied, also ist der Unterschied der beiden Abschnitte dem gegebenen gleich.

Nun ist noch zu zeigen, daß der Winkel BAC ein Rechter ist. Nach der Construction ist der Winkel $FEC = \frac{1}{2}R$ und $AEC = z$, ferner: $FEC = u + x, = u + x'$. Hieraus folgt, daß der Winkel

1) $u = FEC - x' = \frac{1}{2}R - x'$

ist, und ferner daß

2) $z = AEC = x' + FEC = x' + \frac{1}{2}R$

Hieraus bestimmt sich die Summe der Winkel z und u und es ist $z + u = \frac{1}{2}R - x' + \frac{1}{2}R + x' = R$
Da nun die Summe der zwei Winkel z und u die Größe des dritten bestimmen, so ist der Winkel $BAC = 2R - z - u = R$ und also das Dreieck BAC rechtwinklig.

Zweite Auflösung. Beschreibt man mit der kleinern Kathete AC, als Radius, von A aus einen Kreis HFCE, so wird derselbe durch die Punkte E, C, F gehen, und die Kathetensumme BF und Abschnittssumme BC, oder die Hypotenuse erscheinen als Sekanten in demselben, BH als Unterschied der beiden Katheten. Nennt man nun die Kathetensumme S, den Abschnittsunterschied d, die kleinere Kathete y, den kleinern Abschnitt x, so ist der Kathetenunterschied

$$BH = S - 2y$$

und die Hypotenuse

$$H = 2x + d$$

und dieß führt zu folgender Proportion

$$S : 2x + d = d : S - 2y$$

und hieraus gewinnt man für die kleinere Kathete folgende Gleichung 1) $y = \frac{S^2 - d^2}{2S} - \frac{d}{S}x$

Berücksichtigt man nun, daß die kleinere Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem kleinern Abschnitt ist, so zieht man hieraus folgende Gleichung

$$\left(\frac{S^2 - d^2}{2S} - \frac{d}{S}x\right)^2 = (2x + d)x = 2x^2 + dx$$

Wird diese Gleichung entwickelt, so entsteht

$$\left(\frac{S^2 - d^2}{2S}\right)^2 - \frac{d(S^2 - d^2)}{S^2}x + \frac{d^2}{S^2}x^2 = 2x^2 + dx$$

und hieraus, wenn die gehörigen Reductionen gemacht werden,

$$\frac{(S^2 - d^2)^2}{4(2S^2 - d^2)} = x^2 + dx$$

Dieß führt zu folgender Gleichung für den kleinern Abschnitt

1) $x = \sqrt{\frac{(S^2 - d^2)^2}{4(2S^2 - d^2)} + \frac{d^2}{4}} - \frac{d}{2}$

oder $x = \sqrt{\frac{S^4}{8S^2 - 4d^2}} - \frac{d}{2}$

$x = \frac{1}{2}S\sqrt{\frac{S^2}{2S^2 - d^2}} - \frac{d}{2}$

Die Gleichung für den größern Abschnitt ist

2) $A = x + d = \frac{1}{2}S\sqrt{\frac{S^2}{2S^2 - d^2}} + \frac{d}{2}$

Die Gleichung für die Hypotenuse ist

3) $H = 2x + d = S\sqrt{\frac{S^2}{2S^2 - d^2}}$

Die Gleichung für die größere Kathete ist

4) $K = \sqrt{H(x+d)} = \sqrt{\frac{S^2}{2}\frac{S^2}{2S^2 - d^2} + \frac{d.S}{2}\sqrt{\left(\frac{S^2}{2S^2 - d^2}\right)}} =$

$= \sqrt{\frac{S^4}{4S^2 - 2d^2} + \frac{d.S}{2}\sqrt{\left(\frac{S^2}{2S^2 - d^2}\right)}}$

und die Linien AE = AF. Da aber AE = AC ist, so ist auch die Linie AC = AF und folglich

$$BA + AC = BA + AF = BF$$

Es sind also die beiden Seiten BA und AC der gegebenen Summe gleich.

Fällt man von der Spitze A die Linie AD senkrecht auf BC, so wird, da das Dreieck EAC gleichschenklig ist, die Grundlinie EC in zwei gleiche Theile ED und DC getheilt, und es ist also $BE = BD - ED = BD - DC$

Die Linie BD und DC sind die Abschnitte der Grundlinie und BE ihr Unterschied, also ist der Unterschied der beiden Abschnitte dem gegebenen gleich.

Nun ist noch zu zeigen, daß der Winkel BAC ein Rechter ist. Nach der Construction ist der Winkel $FEC = \frac{1}{2}R$ und $AEC = z$, ferner: $FEC = u + x$, $= u + x'$. Hieraus folgt, daß der Winkel

1) $u = FEC - x' = \frac{1}{2}R - x'$

ist, und ferner daß

2) $z = AEC = x' + FEC = x' + \frac{1}{2}R$

Hieraus bestimmt sich die Summe der Winkel z und u und es ist $z + u = \frac{1}{2}R - x' + \frac{1}{2}R + x' = R$

Da nun die Summe der zwei Winkel z und u die Größe des dritten bestimmen, so ist der Winkel $BAC = 2R - z - u = R$ und also das Dreieck BAC rechtwinklig.

Zweite Auflösung. Beschreibt man mit der kleinern Kathete AC, als Radius, von A aus einen Kreis KFCE, so wird derselbe durch die Punkte E, C, F gehen, und die Kathetensumme BF und Abschnittssumme BC, oder die Hypotenuse erscheinen als Sekanten in demselben, BK als Unterschied der beiden Katheten. Nennt man nun die Kathetensumme S, den Abschnittsunterschied d, die kleinere Kathete y, den kleinern Abschnitt x, so ist der Kathetenunterschied

$$BK = S - 2y$$

und die Hypotenuse

$$H = 2x + d$$

und dieß führt zu folgender Proportion

$$S : 2x + d = d : S - 2y$$

Zieht man nun die Linie GC, so entstehen die zwei Dreiecke BFE und BGC, welche den gemeinschaftlichen Winkel GBC haben, und deren Seiten nach der vorliegenden Proportion in gleichem Verhältnisse stehen. Diese Bemerkung führt zu Gleichheit aller Winkel in den beiden Dreiecken. Es ist also der Winkel BEF = BGC, also auch, da BEF = $\frac{1}{2}$R ist, der Winkel BGC = $\frac{1}{2}$R. Der Winkel BGC, oder FGC ist ein Peripheriewinkel im Kreise FGCE, steht auf dem Bogen FEC auf. Der Winkel FAC ist der Centriwinkel in demselben Kreise und steht auch auf demselben Bogen auf, also ist BAC doppelt so groß als FGC, und folglich ist der Winkel

$$BAC = 2 \cdot \tfrac{1}{2}R = R$$

Also ist BAC ein rechter Winkel und das Dreieck BAC rechtwinklig. Da FA = AC, so ist

$$BF = BA - AF = BA - AC$$

Das Dreieck BAC hat den gegebenen Katheten-Unterschied. Fällt man nun in dem gleichschenkligen Dreiecke EAC, die Linie AD auf EC senkrecht, so ist ED = DC, und folglich

$$BE = BD - ED = BD - DC.$$

Das Dreieck BAC hat auch den gegebenen Unterschied der Abschnitte und erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Nennt man den Unterschied der Katheten d, den Abschnitt D, die kleinere Kathete y, den kleinern Abschnitt x, so ist die Summe der Katheten $2y + d$, die der Abschnitte, oder die Hypotenuse $2x + D$. Die Summen und Unterschiede der Katheten und Abschnitte erscheinen nach Fig. 172. als Sekanten des Kreises FGCE. Hieraus gewinnt man folgende Proportion

$$2y + d : 2x + D = D : d.$$

Diese Proportion führt zu folgender Gleichung

$$2xD + D^2 = 2yd + d^2$$

und hieraus bestimmt sich die kleinere Kathete

$$y = \frac{2xD + D^2 - d^2}{2d}$$

Da die kleinere Kathete die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem kleinern Abschnitt ist, so hat man hieraus folgende Gleichung

Die Gleichung für die kleinere Kathete ist

$$5)\ k = \sqrt{H.x} = \sqrt{\frac{S^4}{4S^2-2d^2} - \frac{d.S}{2}\sqrt{\left(\frac{S^2}{2S^2-d^2}\right)}}$$

für die Höhe

$$6)\ h = \sqrt{x(x+d)} = \sqrt{\frac{S^4}{4(2S^2-d^2)} - \frac{d^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{S^4 - 2S^2d^2 + d^4}{4(2S-d^2)}} = \sqrt{\frac{(S^2-d^2)^2}{4(2S^2-d^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{[(S+d)(S-d)]^2}{4(2S^2-d^2)}} = \sqrt{\frac{(S+d)^2(S-d)^2}{4.(2S^2-d^2)}}$$

Aus diesen Formeln lassen sich andere Constructionen herleiten.

§. 157.

Aufgabe. Es ist der Unterschied der beiden Abschnitte und der Unterschied der beiden Katheten gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 172.

Erste Auflösung. Der Unterschied der Katheten sey BF, der Unterschied der Abschnitte BE. Man lege an dem einen Endpunkte E des Abschnitts-Unterschiedes eine unbestimmte Linie unter einem Winkel von 45° und lege den Katheten-Unterschied von dem andern Endpunkt B so zwischen die unbestimmte Linie, daß er mit derselben einen stumpfen Winkel BFE bilde, verlängere BF und BE unbestimmt, errichte in dem Mittelpunkte H der Linie FE eine senkrechte Linie bis zum Durchschnitte A mit der verlängerten BF, und mache AC = AF, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Man beschreibe mit der Linie FA, als Radius, um den Punkt A einen Kreis und verlängere BA bis zur Peripherie, so sind die Linien FA, AE, AC, AG, als Radien, einander gleich; ferner sind die Linien BG und BC zwei Secanten zu dem Kreise EFGC, welche von einem gemeinschaftlichen Punkte B ausgehen. Hieraus folgt die Proportion

BG : BC = BE : BF.

eine negative Größe wäre. Da sie aber in sich keine Gründe der Unmöglichkeit trägt, so berechtigt dieß zu dem Schlusse, daß dieser Ausdruck ungeachtet der ungewöhnlichen Form, worin er erscheint, dennoch einen positiven Werth haben muß. Soll dieß wirklich der Fall seyn, so muß die Größe $2d^2$ größer als D^2 seyn, wodurch dann der Ausdruck einen positiven Werth erhält, denn es ist

$$D^2 - 2d^2 = -(2d^2 - D^2)$$

Setzt man diesen Werth in obige Gleichung, so entsteht

$$\sqrt{\frac{-d^4}{-4(2d^2-D^2)}} = \sqrt{\frac{d^4}{4(2d^2-D^2)}}$$

führt man diese Darstellung ein, so gehen obige Gleichungen in folgende über

1) $x = \frac{1}{2}d\sqrt{\frac{d^2}{2d^2-D^2}} - \frac{D}{2}$

2) $A = \frac{1}{2}d\sqrt{\frac{d^2}{2d^2-D^2}} + \frac{D}{2}$

u. s. w.

§. 158.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und ein spitzer Winkel gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 173.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC, der spitze Winkel x. Man lege an den einen Endpunkt B den gegebenen Winkel x mit unbestimmt langem Schenkel, halbire die Hypotenuse und beschreibe über ihr den Halbkreis BAC, verbinde den Punkt A, wo die Peripherie den Schenkel durchschneidet, mit dem andern Endpunkt C der Hypotenuse, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

§. 159.

Aufgabe. Es ist eine Kathete und der anliegende spitze Winkel gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 173.

Auflösung. Die Kathete sey AB, der spitze Winkel x. Man trage an dem einen Endpunkt A einen rechten, an den

andern B den Winkel x, verlängere die beiden Schenkel bis zu ihrem Durchschnitte C, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Anmerkung. Ist die Kathete und der gegenüberstehende spitze Winkel gegeben, so läßt sich hiernach leicht die Aufgabe lösen.

§. 160.

Aufgabe. Es ist die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und der von beiden eingeschlossene Winkel gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 174.

Auflösung. Die Summe der Hypotenuse und Kathete sey BE, der Winkel x. Man trage an dem einen Endpunkte E die Hälfte des gegebenen Winkels BEA $= \frac{1}{2}x$ an den andern die Ergänzung des Winkels x zu einem Rechten EBA $= R - x$, verlängere die beiden Schenkel bis zu ihrem Durchschnitte A, halbire die Linie AE durch eine senkrechte Linie FC, welche die Summenlinie in C durchschneidet, ziehe AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Vermöge der Construction sind die beiden Dreiecke AFC und FCE congruent, also der Winkel CEA $=$ CAE und die Linie AC $=$ CE.

Geht man von dem Winkel BCA auf die Winkel im Dreiecke ACE über, so ist

$$BCA = CEA + CAE = 2 \cdot CEA = 2 \cdot \tfrac{1}{2}x = x$$

also ist der Winkel BCA dem gegebenen Winkel gleich. Der Winkel BAC wird durch die beiden übrigen bestimmt, und es ist

$$BAC = 2R - x - (R - x) = R$$

also ein Rechter und BAC daher ein rechtwinkliges Dreieck. Da die Linie CA $=$ CE, so ist auch

$$BC + CA = BC + CE = BE$$

Also hat das Dreieck die gegebene Hypotenusen- und Katheten-Summe und den von beiden Linien eingeschlossenen Winkel.

§. 161.

Aufgabe. Es ist die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete, und der an der andern Kathete

anliegende spitze Winkel gegeben. Man soll daraus ein Dreieck bilden. Fig. 174.

Auflösung. Die Summe sey BE, der Winkel y. Man trage an den einen Endpunkt B der Linie BE den gegebenen Winkel y und an den andern E den Winkel $\frac{1}{2}(R - y)$ und verfahre sodann auf die im vorigen § angegebene Weise.

§. 162.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Hypotenuse und einen Kathete, und der an der andern Kathete anliegende Winkel gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig 175.

Auflösung. Der Unterschied sey BE, der Winkel x. Man trage an den einen Endpunkt B den Winkel $ABE = x$, an den andern den Winkel $BEA = R - \frac{1}{2}x$, verlängere die beiden Schenkel bis zu ihrem Durchschnitte A, und den Unterschied BE unbestimmt; errichte auf dem Endpunkte A der Linie BA eine senkrechte Linie bis zu ihrem Durchschnitte C mit der Verlängerung von BE, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Der Winkel bei A ist ein Rechter, also ist das Dreieck BAC rechtwinklig. Hieraus ergeben sich für die Winkel folgende Bestimmungen. Der Winkel $BEA = \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}x$, der Winkel $BCA = R - x$, der Winkel $AEC = z = 2R - (\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}(R + x)$. Durch den Winkel z und den bei C bestimmt sich der Winkel y, und es ist

$$y = 2R - \tfrac{1}{2}(R + x) - (R - x) = \tfrac{1}{2}(R + x)$$

Hieraus folgt, daß die Winkel z und y einander gleich sind, daß also AEC ein gleichschenkliges Dreieck; also auch die Linie $EC = AC$ ist. Geht man von diesen Linien auf die Linie AC und BC über, so ist

$$BE = BC - EC = BC - AC.$$

Demnach ist also in dem rechtwinkligen Dreiecke BAC die Hypotenuse um den gegebenen Unterschied größer, als die Kathete. Es ist der Winkel $ABC = x$ und liegt der Kathete BA an. Hieraus folgt, daß das Dreieck die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

andern B den Winkel x, verlängere die beiden Schenkel bis zu ihrem Durchschnitte C, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Anmerkung. Ist die Kathete und der gegenüberstehende spitze Winkel gegeben, so läßt sich hiernach leicht die Aufgabe lösen.

§. 160.

Aufgabe. Es ist die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und der von beiden eingeschlossene Winkel gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 174.

Auflösung. Die Summe der Hypotenuse und Kathete sey BE, der Winkel x. Man trage an dem einen Endpunkte E die Hälfte des gegebenen Winkels $BEA = \frac{1}{2}x$ an den andern die Ergänzung des Winkels x zu einem Rechten $EBA = R - x$, verlängere die beiden Schenkel bis zu ihrem Durchschnitte A, halbire die Linie AE durch eine senkrechte Linie FC, welche die Summenlinie in C durchschneidet, ziehe AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Vermöge der Construction sind die beiden Dreiecke AFC und FCE congruent, also der Winkel CEA = CAE und die Linie AC = CE.

Geht man von dem Winkel BCA auf die Winkel im Dreiecke ACE über, so ist

$$BCA = CEA + CAE = 2 \cdot CEA = 2 \cdot \tfrac{1}{2}x = x$$

also ist der Winkel BCA dem gegebenen Winkel gleich. Der Winkel BAC wird durch die beiden übrigen bestimmt, und es ist

$$BAC = 2R - x - (R - x) = R$$

also ein Rechter und BAC daher ein rechtwinkliges Dreieck. Da die Linie CA = CE, so ist auch

$$BC + CA = BC + CE = BE$$

Also hat das Dreieck die gegebene Hypotenusen- und Katheten-Summe und den von beiden Linien eingeschlossenen Winkel.

§. 161.

Aufgabe. Es ist die Summe der Hypotenuse und der einen Kathete, und der an der andern Kathete

also ist der Winkel ACD = ADC und folglich ACD ein gleichschenkliges Dreieck, also auch AC = AD.
Hieraus folgt, daß BA + AC = BA + AD = BD ist.
Das Dreieck BAC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Eine zweite Auflösung gewinnt man, wenn man nach construirtem Dreiecke BDC von dem Punkte C die Linie CA senkrecht auf BD fällt.

Eine dritte Auflösung gewinnt man, wenn man über der Linie CD einen Halbkreis beschreibt und dann AC zieht.

Eine vierte, wenn man CD durch die senkrechte MA halbirt und dann AC zieht.

Anmerkung. Es ist leicht zu erkennen, daß der Halbkreis BAC die Linie BD immer durchschneiden wird, so lange der Winkel x kleiner, als R ist. Ist dieß nicht der Fall, so wird die Aufgabe unmöglich.

§. 165.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen den beiden Katheten und der an der größern Kathete anliegende spitze Winkel gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 177.

Erste Auflösung. Der Unterschied sey BE, der Winkel x. Man lege an den einen Endpunkt B der Linie BE den gegebenen Winkel x = CBE und an den andern, auf seine Verlängerung die Hälfte eines Rechten AEC = $\frac{1}{2}$ R und verlängere die Schenkel der beiden Winkel bis zu ihrem Durchschnitte C, beschreibe über BC einen Halbkreis und verlängere BE bis zum Durchschnitte A des Halbkreises, ziehe AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist der Winkel ABC = x, der Winkel BAC ein Rechter, und AEC = $\frac{1}{2}$ R. Hieraus bestimmt sich der dritte Winkel ECA im Dreieck EAC, und es ist EAC = 2 R — (R + $\frac{1}{2}$ R) = $\frac{1}{2}$ R.
Hieraus folgt die Gleichheit der beiden Winkel AEC und ECA, folglich ist die Linie EA = AC. Geht man von der Linie EA auf BC über, so ist BE = BA — EA = BA — AC.

Die Linie BA und AC bilden die Katheten des Dreiecks BAC, welches wegen des Winkels bei A rechtwinklig ist, und haben den gegebenen Unterschied.

Zweite Auflösung. Man construire, wie vorhin, das Dreieck BEC, beschreibe über EC einen Halbkreis und vollende das Dreieck BAC, so ist es das gesuchte.

Dritte Auflösung. Man construire das Dreieck BEC, fälle von C aus auf die Verlängerung des Unterschiedes BE eine senkrechte Linie CA, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Eine vierte Auflösung gewinnt man dadurch, daß man EC halbirt und in ihrem Mittelpunkte M eine senkrechte errichtet.

§. 166.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen beiden Katheten und der an der kleinern Kathete anliegende spitze Winkel gegeben. Fig. 178.

Erste Auflösung. Der Unterschied sey CE, der Winkel x. Man trage auf den einen Endpunkt C des Unterschieds CE die Hälfte eines rechten Winkels BCE $= \frac{1}{2}$ R und an den andern auf seiner Verlängerung den gegebenen Winkel BEA $=$ x und verlängere die beiden Schenkel bis zum Durchschnitte B, über der Linie BC beschreibe man einen Halbkreis BAC, der die Verlängerung von CE in dem Punkte A durchschneiden wird, ziehe BA, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Der Winkel BAC ist ein rechter, also das Dreieck BAC rechtwinklig; der Winkel bei C ist $\frac{1}{2}$ R, also ist BAC gleichschenklig und folglich BA $=$ AC. Geht man von dem Dreiecke BAC auf das Dreieck BAE über, so ist dasselbe rechtwinklig, hat den gegebenen Winkel x an der kleinern Kathete liegen, und die Kathete BA ist um EC größer als die andere AE; denn es ist

$$EC = AC - AE = BA - AE.$$

Zweite Auflösung. Man bilde das Dreieck BEC und beschreibe über BE einen Halbkreis BAE, vollende BAE, so ist es das gesuchte.

Dritte Auflösung. Man bilde das Dreieck BEC, fälle von dem Punkte B auf die Verlängerung von CE eine senkrechte Linie BA, so ist BAE das gesuchte Dreieck.

Vierte Auflösung. Man errichte in dem Mittelpunkte von BC eine senkrechte Linie MA bis zum Durchschnitte A mit der Verlängerung von CE, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Anmerkung zu §. 165 und 166. Da von dem Unterschied der Katheten nur dann die Rede seyn kann, wenn die beiden Katheten an Größe von einander verschieden sind, so müssen die beiden spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks auch an Größe verschieden seyn, und der eine größer, der andere kleiner, als die Hälfte eines rechten Winkels seyn, und ferner muß der kleinere Winkel an der größern Kathete und der größere an der kleinern Kathete anliegen.

§. 167.

Aufgabe. Der Umfang und ein spitzer Winkel ist gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 179.

Erste Auflösung. Der Umfang sey DE und der eine spitze Winkel x. Man trage an den einen Endpunkt D der Linie DE eine unbestimmte Linie unter einem halben rechten Winkel und an den andern E unter einen Winkel $AED = \frac{1}{2}x$, die Linie EA, welche die vorige schneidet, fälle von A die senkrechte Linie AB auf DE, halbire die Linie AE und errichte in ihrem Mittelpunkte die Linie MC senkrecht bis zum Durchschnitte mit DE und verbinde C mit A, so ist das Dreieck ABC das gesuchte.

Beweis. Aus der Construction geht leicht hervor, daß die Dreiecke ADB und ACE gleichschenklige Dreiecke sind, worin die Linie $DB = AB$ und $AC = CE$ und $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x'$ ist, ferner der Winkel $ACB = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x'$. Da $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x'$ ist, so ist der Winkel $ACB = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = x$

Hieraus folgt, daß die Linie

$$DE = AD + BC + CE = AB + BC + CE$$

und daß also das Dreieck ABC ein rechtwinkliges ist, welches einen gegebenen spitzen Winkel und einen bestimmten Umfang hat.

Die Linie BA und AC bilden die Katheten des Dreiecks BAC, welches wegen des Winkels bei A rechtwinklig ist, und haben den gegebenen Unterschied.

Zweite Auflösung. Man construire, wie vorhin, das Dreieck BEC, beschreibe über EC einen Halbkreis und vollende das Dreieck BAC, so ist es das gesuchte.

Dritte Auflösung. Man construire das Dreieck BEC, fälle von C aus auf die Verlängerung des Unterschiedes BE eine senkrechte Linie CA, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Eine vierte Auflösung gewinnt man dadurch, daß man EC halbirt und in ihrem Mittelpunkte M eine senkrechte errichtet.

§. 166.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen beiden Katheten und der an der kleinern Kathete anliegende spitze Winkel gegeben. Fig. 178.

Erste Auflösung. Der Unterschied sey CE, der Winkel x. Man trage auf den einen Endpunkt C des Unterschieds CE die Hälfte eines rechten Winkels BCE $= \frac{1}{2}$ R und an den andern auf seiner Verlängerung den gegebenen Winkel BEA $=$ x und verlängere die beiden Schenkel bis zum Durchschnitte B, über der Linie BC beschreibe man einen Halbkreis BAC, der die Verlängerung von CE in dem Punkte A durchschneiden wird, ziehe BA, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Der Winkel BAC ist ein rechter, also das Dreieck BAC rechtwinklig; der Winkel bei C ist $\frac{1}{4}$ R, also ist BAC gleichschenklig und folglich BA $=$ AC. Geht man von dem Dreiecke BAC auf das Dreieck BAE über, so ist dasselbe rechtwinklig, hat den gegebenen Winkel x an der kleinern Kathete liegen, und die Kathete BA ist um EC größer als die andere AE; denn es ist

$$EC = AC - AE = BA - AE.$$

Zweite Auflösung. Man bilde das Dreieck BEC und beschreibe über BE einen Halbkreis BAE, vollende BAE, so ist es das gesuchte.

und das Dreieck ABC ist rechtwinklig und enthält den gegebenen Winkel x.

Der Winkel AEB $= \frac{1}{2}(2R + x)$, also ist sein anliegender Winkel BEC $= 2R - \frac{1}{2}(2R + x)$

$= \frac{1}{2}(2R - x)$

und der Winkel EBC $= 2R - x - \frac{1}{2}(2R - x) = \frac{1}{2}(2R - x)$

Also sind die Winkel bei E und B in dem Dreiecke EBC einander gleich, und also auch die Linie EC und BC. Hieraus erhält man $DE = DC - EC$

oder $DE = DA + AC - EC$

oder, da $AB = DA$ und $EC = BC$ ist,

$DE = AC + AB - BC$

und das Dreieck ABC entspricht also den aufgestellten Bedingungen.

Eine andere Auflösung gewinnt man, wenn nach construirtem Dreieck DEB auf der Linie EB ein gleichschenkliges Dreieck gebildet, und dann auf BC in dem Punkte B die senkrechte Linie BA errichtet wird.

§. 169.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und zwischen der andern Kathete, und der, letzterer gegenüber liegende, spitze Winkel gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 180.

Auflösung. Der Unterschied sey DE, der gegebene Winkel y. Man bilde aus DE und dem Winkel $\frac{1}{2}$ y und $\frac{1}{2}(3R - y)$ das Dreieck DBE und verfahre auf eine der vorhin angegebenen Arten.

Anmerkung zu dieser und der vorhergehenden Aufgabe. Ist der Unterschied zwischen der Summe der Hypotenuse und der größern Kathete und zwischen der kleinern Kathete gegeben, so muß der an der kleinern Kathete anliegende Winkel größer als $\frac{1}{2}R$, der entgegenstehende aber kleiner als $\frac{1}{2}R$ seyn. Ist der Unterschied zwischen der Summe der Hypotenuse und kleinern Kathete und zwischen der größern gegeben, so kehren sich die Bestimmungen um.

Zweite Auflösung. Man bilde auf die angegebene Art das Dreieck DAE, halbire die Linie AE und beschreibe über ihr einen Halbkreis ABE und errichte in ihrem Mittelpunkte M eine senkrechte Linie MC, so sind die Durchschnittspunkte des Halbkreises und der Linie MC die Endpunkte der einen Kathete und ABC das rechtwinklige Dreieck.

Dritte Auflösung. Man bilde das Dreieck DAE, halbire AE durch eine senkrechte und beschreibe über AD einen Halbkreis ABD, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Eine vierte gewinnt man dadurch, daß man die beiden Linien AD und AE durch senkrechte Linien halbirt.

§. 168.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Summe der Hypotenuse und der einen Kathete, und zwischen der andern Kathete, und der an der letztern anliegende spitze Winkel gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 180.

Auflösung. Der gegebene Unterschied sey DE, der gegebene Winkel x. Man trage an den einen Endpunkt D der Linie DE den Winkel $\frac{1}{2}(R - x)$ und an den andern E den Winkel $\frac{1}{2}(2R + x)$ und bilde das Dreieck DBE. Nun halbire man die Linie DB und errichte in ihrem Mittelpunkte M eine senkrechte Linie, welche hinlänglich verlängert, die Linie DE in einem Punkte A durchschneiden wird, ziehe die Linie AB und errichte auf ihrem Endpunkte B eine senkrechte Linie BC, so ist das Dreieck ABC das gesuchte.

Beweis. Aus der Construction erhellt, daß das Dreieck DBA ein gleichschenkliges ist, worin die Winkel z und z' und die Linien DA und AB einander gleich sind. Der Winkel BAC in dem Dreiecke BAC ist als äusserer den beiden, im Dreiecke gegenüberstehenden, Winkeln gleich. Es ist also

$$BAC = z + z' = \tfrac{1}{2}(R - x) + \tfrac{1}{2}(R - x)$$
$$= R - x.$$

Da nun der Winkel ABC nach der Construction ein Rechter ist, so ist der Winkel $ACB = R - (R - x)$

$$= x$$

und das Dreieck ABC ist rechtwinklig und enthält den gegebenen Winkel x.

Der Winkel $AEB = \frac{1}{2}(2R + x)$, also ist sein anliegender Winkel $BEC = 2R - \frac{1}{2}(2R + x)$

$= \frac{1}{2}(2R - x)$

und der Winkel $EBC = 2R - x - \frac{1}{2}(2R - x) = \frac{1}{2}(2R - x)$

Also sind die Winkel bei E und B in dem Dreiecke EBC einander gleich, und also auch die Linie EC und BC. Hieraus erhält man $DE = DC - EC$

oder $DE = DA + AC - EC$

oder, da $AB = DA$ und $EC = BC$ ist,

$DE = AC + AB - BC$

und das Dreieck ABC entspricht also den aufgestellten Bedingungen.

Eine andere Auflösung gewinnt man, wenn nach construirtem Dreieck DEB auf der Linie EB ein gleichschenkliges Dreieck gebildet, und dann auf BC in dem Punkte B die senkrechte Linie BA errichtet wird.

§. 169.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Summe der Hypotenuse und der einen Kathete und zwischen der andern Kathete, und der, letzterer gegenüber liegende, spitze Winkel gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 180.

Auflösung. Der Unterschied sey DE, der gegebene Winkel y. Man bilde aus DE und dem Winkel $\frac{1}{2}y$ und $\frac{1}{2}(3R - y)$ das Dreieck DBE und verfahre auf eine der vorhin angegebenen Arten.

Anmerkung zu dieser und der vorhergehenden Aufgabe. Ist der Unterschied zwischen der Summe der Hypotenuse und der größern Kathete und zwischen der kleinern Kathete gegeben, so muß der an der kleinern Kathete anliegende Winkel größer als $\frac{1}{2}R$, der entgegenstehende aber kleiner als $\frac{1}{2}R$ seyn. Ist der Unterschied zwischen der Summe der Hypotenuse und kleinern Kathete und zwischen der größern gegeben, so kehren sich die Bestimmungen um.

Anmerkung. Die Aufgabe: ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der Summe der Katheten und der an der kleinern Kathete anliegende Winkel gegeben ist, läßt sich nun leicht behandeln.

§. 171.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Hypotenuse und zwischen der Differenz der beiden Katheten und der an der größern Kathete liegende Winkel gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck. bilden Fig. 183.

Auflösung. Der gegebene Unterschied sey AD, der Winkel sey x. An dem einen Endpunkte A der Linie AD trage man einen Winkel $\frac{1}{2}R - x$ und an den andern D den Winkel $\frac{1}{2}(2R + x)$ und verlängere die Schenkel dieser Winkel bis zu ihrer Vereinigung E, trage an jeden Endpunkt der größern Linie EA die Hälfte eines rechten Winkels, und verlängere ihre Schenkel bis zu ihrem Durchschnitte C, verlängere AD und CE, bis sie sich in B durchschneiden, so ist das Dreieck CBA das gesuchte.

Beweis. Vermöge der Construction ist der Winkel $z = z' = \frac{1}{2}R$, also ist der dritte Winkel $r = R$, das Dreieck ECA gleichschenklig und die Linie $EC = CA$. Der Winkel $EAD = \frac{1}{2}R - x$, wird er mit dem Winkel z' vereinigt, so wird der Winkel $CAB = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R - x = R - x$. Der Winkel r und der Winkel CAB gehören in das Dreieck CBA, hieraus folgt, daß das Dreieck ABC, wegen des rechten Winkels r, ein rechtwinkliges und daß ferner der dritte Winkel $CBA = 2R - (2R - x) = x$. Das Dreieck ABC ist also ein rechtwinkliges Dreieck, das den spitzen Winkel x enthält.

Der Winkel $m = \frac{1}{2}(2R + x)$ bestimmt seinen Nebenwinkel n in dem Dreiecke EDB und es ist $n = 2R - \frac{1}{2}(2R + x) = \frac{1}{2}(2R - x)$, dieser und der Winkel x bestimmen den dritten n', und es ist $n' = 2R - \frac{1}{2}(2R - x) - x = \frac{1}{2}(2R - x)$

Hieraus folgt, daß die Winkel n und n', also auch die Linien EB und DB einander gleich sind. Dieß führt nun für die Linien zu folgenden Schlüssen: die Linie EB ist der Unterschied der beiden Katheten, denn es ist

$$EC = CB - CA$$

Die Linie AD ist der Unterschied zwischen EB, dem Katheten-Unterschiede und zwischen der Hypotenuse, denn es ist

$$AD = BA - EB$$

Aus dem Gesagten folgt, daß das Dreieck BCA den aufgestellten Anforderungen entspricht.

§. 172.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Hypotenuse und zwischen der Differenz der Katheten und der an der kleinern Kathete liegende Winkel gegeben. Man soll daraus das Dreieck bilden. Fig. 183.

Auflösung. Der Unterschied sey AD, der Winkel x. Man bilde aus $x - \frac{1}{2}R$ und $\frac{1}{2}(3R - x)$ ein Dreieck AED und verfahre im Uebrigen wie im vorhergehenden §.

§. 173.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse gegeben. Man soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck beschreiben, worin die größere Kathete doppelt so groß als die Höhe ist. Fig. 184.

Erste Auflösung. Die Hypotenuse sey BC. Man beschreibe über ihr einen Halbkreis BAC, nehme die Hälfte der Hypotenuse BM und trage BM = BA von dem einen Endpunkte der Hypotenuse, als Sehne, in den Halbkreis, ziehe AC, und fälle von dem Punkte A die Linie AD auf BC senkrecht, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck und AC = 2 AD.

Beweis. Nach der Construction ist die Linie $BA = \frac{1}{2}BC$, und DAC ein rechtwinkliges Dreieck. Die Dreiecke ADC und ABC sind einander ähnlich und führen zu folgender Proportion BC : BA = AC : AD.

Anmerkung. Die Aufgabe: ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, wenn der Unterschied zwischen der Hypotenuse und der Summe der Katheten und der an der kleinern Kathete anliegende Winkel gegeben ist, läßt sich nun leicht behandeln.

§. 171.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Hypotenuse und zwischen der Differenz der beiden Katheten und der an der größern Kathete liegende Winkel gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden Fig. 183.

Auflösung. Der gegebene Unterschied sey AD, der Winkel sey x. An dem einen Endpunkte A der Linie AD trage man einen Winkel $\frac{1}{2}R - x$ und an den andern D den Winkel $\frac{1}{2}(2R + x)$ und verlängere die Schenkel dieser Winkel bis zu ihrer Vereinigung E, trage an jeden Endpunkt der größern Linie EA die Hälfte eines rechten Winkels, und verlängere ihre Schenkel bis zu ihrem Durchschnitte C, verlängere AD und CE, bis sie sich in B durchschneiden, so ist das Dreieck CBA das gesuchte.

Beweis. Vermöge der Construction ist der Winkel $z = z' = \frac{1}{2}R$, also ist der dritte Winkel $r = R$, das Dreieck ECA gleichschenklig und die Linie $EC = CA$. Der Winkel $EAD = \frac{1}{2}R - x$, wird er mit dem Winkel z' vereinigt, so wird der Winkel $CAB = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R - x = R - x$. Der Winkel r und der Winkel CAB gehören in das Dreieck CBA, hieraus folgt, daß das Dreieck ABC, wegen des rechten Winkels r, ein rechtwinkliges und daß ferner der dritte Winkel $CBA = 2R - (2R - x) = x$. Das Dreieck ABC ist also ein rechtwinkliges Dreieck, das den spitzen Winkel x enthält.

Der Winkel $m = \frac{1}{2}(2R + x)$ bestimmt seinen Nebenwinkel n in dem Dreiecke EDB und es ist $n = 2R - \frac{1}{2}(2R + x) = \frac{1}{2}(2R - x)$, dieser und der Winkel x bestimmen den dritten n', und es ist $n' = 2R - \frac{1}{2}(2R - x) - x = \frac{1}{2}(2R - x)$

Hieraus folgt, daß die Winkel n und n', also auch die Linien EB und DB einander gleich sind. Dieß führt nun für die Linien zu folgenden Schlüssen: die Linie EB ist der Unterschied der beiden Katheten, denn es ist

$$EC = CB - CA$$

Die Linie AD ist der Unterschied zwischen EB, dem Katheten-Unterschiede und zwischen der Hypotenuse, denn es ist

$$AD = BA - EB$$

Aus dem Gesagten folgt, daß das Dreieck BCA den aufgestellten Anforderungen entspricht.

§. 172.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Hypotenuse und zwischen der Differenz der Katheten und der an der kleinern Kathete liegende Winkel gegeben. Man soll daraus das Dreieck bilden. Fig. 183.

Auflösung. Der Unterschied sey AD, der Winkel x. Man bilde aus $x - \frac{1}{2}R$ und $\frac{1}{2}(3R - x)$ ein Dreieck AED und verfahre im Uebrigen wie im vorhergehenden §.

§. 173.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse gegeben. Man soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck beschreiben, worin die größere Kathete doppelt so groß als die Höhe ist. Fig. 184.

Erste Auflösung. Die Hypotenuse sey BC. Man beschreibe über ihr einen Halbkreis BAC, nehme die Hälfte der Hypotenuse BM und trage BM = BA von dem einen Endpunkte der Hypotenuse, als Sehne, in den Halbkreis, ziehe AC, und fälle von dem Punkte A die Linie AD auf BC senkrecht, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck und AC = 2 AD.

Beweis. Nach der Construction ist die Linie $BA = \frac{1}{2}BC$, und DAC ein rechtwinkliges Dreieck. Die Dreiecke ADC und ABC sind einander ähnlich und führen zu folgender Proportion BC : BA = AC : AD.

Da aber BC = 2 BA ist, so geht diese Proportion in folgende über AC : AD = 2 BA : BA = 2 : 1

Die Kathete AC ist also doppelt so groß, als die Höhe AD und das Dreieck BAC ist, wegen des Winkels bei BAC, rechtwinklig, entspricht also demnach den Anforderungen der Aufgabe.

Anmerkung. Diese Aufgabe läßt sich leicht in das Allgemeine stellen und auflösen. Wird verlangt, über einer gegebenen Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu bilden, worin die größere Kathete das n fache von der Höhe sey, so theile man die Hypotenuse in n gleiche Theile und bilde aus ihr und ihrem nten Theile als Kathete ein rechtwinkliges Dreieck, so wird in ihm die größere Kathete n mal so groß als die Höhe seyn.

Das Verhältniß zwischen der größern Kathete und der Höhe ist dann am kleinsten, wenn über der Hypotenuse ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck gebildet ist. In diesem Falle ist jede Kathete gleich der Wurzel aus dem doppelten Quadrat der Höhe und das Verhältniß zwischen Höhe und Kathete drückt sich dann durch folgende Proportion aus

$$K : h = \sqrt{2} : 1$$

Der Exponent dieses Verhältnisses ist daher $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Aus dem Gesagten entnimmt sich nun folgendes für die Möglichkeit der Aufgabe. Die Aufgabe ist möglich, wenn das Verhältniß zwischen Kathete und Höhe größer ist, als $\sqrt{2} : 1$; sie ist unmöglich, wenn es kleiner ist.

Soll endlich über einer Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden, worin die größere Kathete zur Höhe in dem Verhältnisse, wie m : n steht, so ist sie möglich, wenn das Verhältniß m : n größer ist, als $\sqrt{2} : 1$, also wenn m größer als n ist. Für diesen Fall gilt dann folgende Construction: Man theile die Hypotenuse in m gleiche Theile und bilde aus dem Abschnitte der Hypotenuse, welcher n gleiche Theile enthält, als Kathete und der gegebenen Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck, so wird seine Höhe und größere Kathete in dem gegebenen Verhältnisse stehen.

Zweite Auflösung. Man nenne die Hypotenuse H und das Verhältniß, worin die Höhe zur größeren Kathete stehen soll, 1 : n, und denke sich die Hypotenuse in $n \cdot n = n^2$ Theile eingetheilt und ein rechtwinkliges Dreieck gebildet, dessen Hypotenusen-Abschnitte sich wie $1 : n^2 - 1$ verhalten, so ist

Daher ist also das Verhältniß der Kathete zur Höhe wie n : m in die Gränzen 1 : 1 und 1 : $\sqrt{2}$ eingeschlossen. Hiernach bestimmt sich auch die Möglichkeit der Aufgabe.

§. 175.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse gegeben. Man soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin das Quadrat der größern Kathete dreimal so groß, als das der Höhe ist. Fig. 185.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC. Man theile sie in drei Theile, errichte auf dem Endpunkte D ihres dritten Theiles BD eine senkrechte Linie, beschreibe über BC einen Halbkreis, welcher die senkrechte Linie in dem Punkte A durchschneiden wird, ziehe AB und AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist $BD = \frac{1}{3}BC$, $DC = \frac{2}{3}BC$. Das Dreieck BAC ist, wegen des rechten Winkels bei A, rechtwinklig, und AD die Höhe dieses Dreiecks. Die Höhe ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten und die Kathete AC die, zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte, demnach ist also das Quadrat der Höhe

$$AD^2 = \frac{1}{3}BC \,.\, \frac{2}{3}BC = \frac{2}{9}BC^2$$

das Quadrat der Kathete

$$AC^2 = \frac{2}{3}BC \,.\, BC = \frac{2}{3}BC^2$$

Hieraus gewinnt man für die Vergleichung der Quadrate beider Linien folgende Proportion

$$AD^2 : AC^2 = \frac{2}{9}BC^2 : \frac{2}{3}BC^2$$

oder

$$AD^2 : AC^2 = \frac{2}{9} : \frac{6}{9} = 1 : 3$$

also ist AC^2 dreimal so groß, als AD^2.

Anmerkung. Diese Aufgabe läßt sich leicht ins Allgemeine übertragen. Wird verlangt, daß über einer Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden soll, worin das Quadrat der einen Kathete zu dem der Höhe in dem Verhältnisse wie m : n stehen soll, so theile man die Hypotenuse in so viele gleiche Theile ein, als die größere von den beiden Verhältnißzahlen Einheiten enthält, und

für die Höhe

3) $h = \sqrt{a.A} = \frac{H}{m}\sqrt{\frac{m^2.(m^2-n^2)}{n^2}} = \frac{H}{n}\sqrt{m^2-n^2}$

für die Kathete

4) $K = \sqrt{A.H} = \frac{H}{m}\sqrt{m^2-n^2}$

woraus zwischen Höhe und Kathete folgende Proportion sich ergibt

$$h : K = \frac{H}{n}\sqrt{m^2-n^2} = \frac{H}{m}\sqrt{m^2-n^2}$$

oder $h : K = \frac{1}{n} : \frac{1}{m}$

oder wenn die beiden letzten Glieder mit m n vervielfacht werden,

$$h : K = m : n$$

Hieraus erhellt also die Richtigkeit der analytischen Auflösung.

§. 174.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse gegeben. Man soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin die kleinere Kathete zur Höhe in einem gegebenen Verhältnisse stehe. Fig. 184.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC, das Verhältniß zwischen der kleinern Kathete und Höhe sey n : m. Man theile die Hypotenuse in n gleiche Theile und zähle von ihr m Theile ab, bilde aus der Hypotenuse H und dem Stücke, welches m gleiche Theile enthält, als Kathete, ein rechtwinkliges Dreieck, so ist dieses das gesuchte; denn es wird sich alsdann die Höhe zur kleinern Kathete verhalten, wie die Hypotenuse zur größern Kathete. Dieß wird durch folgende Proportion ausgedrückt

$$k : h = H : \frac{m}{n} H$$

oder

$$k : h = n : m.$$

Anmerkung. Die Kathete und Höhe können nie einander gleich werden, daher muß das Verhältniß beider größer, als die Einheit werden. Nach der Anmerkung des vorigen §. zur ersten Auflösung, kann dieses Verhältniß nicht größer werden, als $1 : \sqrt{2}$

Daher ist also das Verhältniß der Kathete zur Höhe wie n : m in die Gränzen 1 : 1 und 1 : $\sqrt{2}$ eingeschlossen. Hiernach bestimmt sich auch die Möglichkeit der Aufgabe.

§. 175.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse gegeben. Man soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin das Quadrat der größern Kathete dreimal so groß, als das der Höhe ist. Fig. 185.

Auflösung. Die Hypotenuse sey BC. Man theile sie in drei Theile, errichte auf dem Endpunkte D ihres dritten Theiles BD eine senkrechte Linie, beschreibe über BC einen Halbkreis, welcher die senkrechte Linie in dem Punkte A durchschneiden wird, ziehe AB und AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist $BD = \frac{1}{3}BC$, $DC = \frac{2}{3}BC$. Das Dreieck BAC ist, wegen des rechten Winkels bei A, rechtwinklig, und AD die Höhe dieses Dreiecks. Die Höhe ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten und die Kathete AC die, zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte, demnach ist also das Quadrat der Höhe

$$AD^2 = \frac{1}{3}BC \,.\, \frac{2}{3}BC = \frac{2}{9}BC^2$$

das Quadrat der Kathete

$$AC^2 = \frac{2}{3}BC \,.\, BC = \frac{2}{3}BC^2$$

Hieraus gewinnt man für die Vergleichung der Quadrate beider Linien folgende Proportion

$$AD^2 : AC^2 = \frac{2}{9}BC^2 : \frac{2}{3}BC^2$$

oder $$AD^2 : AC^2 = \frac{2}{9} : \frac{6}{9} = 1 : 3$$

also ist AC^2 dreimal so groß, als AD^2.

Anmerkung. Diese Aufgabe läßt sich leicht ins Allgemeine übertragen. Wird verlangt, daß über einer Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck gebildet werden soll, worin das Quadrat der einen Kathete zu dem der Höhe in dem Verhältnisse wie m : n stehen soll, so theile man die Hypotenuse in so viele gleiche Theile ein, als die größere von den beiden Verhältnißzahlen Einheiten enthält, und

der Katheten sind den Produkten aus der Hypotenuse und den anliegenden Abschnitten gleich. Die Quadrate der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehen daher in folgendem Verhältniß unter einander

$$BA^2 : AC^2 : BC^2 = BD \cdot BC : DC \cdot BC : BC \cdot BC$$
$$= BD : DC : BC.$$

Die Beschaffenheit der Quadrate der drei Seiten hängt daher von der Eintheilung der Hypotenuse BC in zwei Theile ab, diese müssen so beschaffen seyn, daß sie in einer geometrischen Proportion stehen. Die Linie BC muß also so getheilt werden, daß $BD : DC = DC : BC$ ist.

Erste Auflösung. Die Hypotenuse sey BC. Man halbire sie und errichte an einem ihrer Endpunkte B ihre Hälfte $BE = \frac{1}{2}BC$ senkrecht und ziehe EC; nun beschreibe man von dem Punkte E mit EB, als Radius, einen Kreisbogen BGF, mache $DC = GC$, beschreibe über BC einen Halbkreis, errichte in dem Punkte D die Linie DA senkrecht bis zum Durchschnitte A mit der Kreislinie des Halbkreises, ziehe AB und AC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Man verlängere die Linie CE bis F, so ist $FG = 2EB = BC$. Die Linie BC steht auf dem Endpunkte B des Radius EB senkrecht auf, ist also eine Tangente zum Kreise FBG und FC eine Sekante. Da die Tangente die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Sekante und dem äussern Abschnitte ist, so hat man

$$BC^2 = FC \cdot GC$$

oder, da $FG = BC$ und $GC = DC$ ist,

$$BC^2 = (BC + DC)\, DC = BC \cdot DC + DC^2$$

Die Linie BC läßt sich in die Theile BD und DC zerfällen. Demnach ist

$$(BD + DC)^2 = (BD + DC)\, DC + DC^2$$

oder $BD^2 + 2DC \cdot BD + DC^2 = BD \cdot DC + 2DC^2$

also $BD^2 + DC \cdot BD = DC^2$

oder $(BD + DC)\, BD = DC^2$

$$BC \cdot BD = DC^2$$

und hieraus zieht man folgende Proportion

$$BD : DC = DC : BC$$

Die

in 3, d gleiche Theile, beschreibe über ihr einen Kreisbogen BAC, und errichte in dem Endpunkte D des Abschnittes, welcher d gleiche Theile einschließt, eine senkrechte Linie DA bis zu dem Durchschnitte A mit dem Kreisbogen BAC, und ziehe BA und AC, so ist BAC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist das Dreieck BAC rechtwinklig und der Abschnitt BD = d, der Abschnitt DC = 2 d und die Hypotenuse BC = 3 d. Nun sind die Quadrate der Katheten BA und AC die mittleren geometrischen Proportionalen zwischen der Hypotenuse und den anliegenden Abschnitten, oder den Rechtecken zwischen diesen Linien gleich. Demnach ist also das Quadrat der Kathete BA

$$BA^2 = BD \,.\, BC$$

das Quadrat der Kathete AC

$$AC^2 = DC \,.\, BC$$

das Quadrat der Hypotenuse

$$BC^2 = BC \,.\, BC$$

und es stehen daher die Quadrate dieser Linien in folgendem Verhältniß:

$$BA^2 : AC^2 : BC^2 = BD \,.\, BC : DC \,.\, BC : BC \,.\, BC$$
$$= BD : DC : BC.$$

Nun stehen die Linien BD = d, DC = 2 d, BC = 3 d in der arithmetischen stetigen Proportion

$$d - 2\,d = 2\,d - 3\,d$$

deren Unterschied d ist; also stehen auch die Quadrate der Linien BA, AC und BC in derselben arithmetischen Proportion, und das Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

§. 177.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse gegeben. Man soll über ihr ein rechtwinkliges Dreieck bilden, worin die Quadrate der Katheten und der Hypotenuse in einer geometrischen Proportion stehen. Fig. 186.

Erörterung. ABC sey das gesuchte rechtwinklige Dreieck: Man fälle von der Spitze A des rechten Winkels die Höhe AD, so entstehen die Abschnitte AD und DC, und die Quadrate

den Katheten zu einander stehen, sey angedeutet durch die Linien ae und ec.

Erste Auflösung. Man setze beide Linien ae und ec unter einem rechten Winkel aneinander und vollende das Dreieck aec, fälle von der Spitze des rechten Winkels e auf die Hypotenuse ac die senkrechte Linie eD, und trage von D aus auf die verlängerte Senkrechte die gegebene Höhe DB, ziehe von dem Endpunkte B auf die verlängerte Hypotenuse ac mit den beiden Linien ae und ac die Parallel-Linien BA und BC, so ist das Dreieck ABC das gesuchte Dreieck.

Zweite Auflösung. Fig. 188. Man setze die Linien ac und ec unter einem rechten Winkel aneinander, verlängere sie unbestimmt und verbinde die Punkte a und c durch die gerade Linie ac, fälle von der Spitze e des rechten Winkels die Linie ed und trage von e aus auf ihre Verlängerung die Linie eB = BD und ziehe durch den Endpunkt B die Linie AC senkrecht, so ist das Dreieck AeC das gesuchte.

Die Beweise führen sich leicht.

§. 179.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und das Verhältniß, worin die zwei Katheten zu einander stehen, gegeben. Man soll daraus ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Fig. 189.

Die Hypotenuse sey AC, das Verhältniß, worin die zwei Linien zu einander stehen, sey n : m und werde durch die Linien ab und bC ausgedrückt.

Erste Auflösung. Man setze die beiden Linien ab und bC unter einem rechten Winkel aneinander und suche zu ihnen die Hypotenuse aC, trage von C aus auf die Linie Ca die Hypotenuse CA, verlängere die Linie bC und fälle von dem andern Endpunkt A eine Linie senkrecht auf CB, so ist das hiedurch entstandene Dreieck ABC das gesuchte.

Zweite Auflösung. Man bilde aus ab und bC, als Katheten, ein rechtwinkliges Dreieck, trage von C aus auf Ca

die Hypotenuse AC und beschreibe über ihr den Halbkreis ABC, verlängere die Kathete Cb bis sie die Peripherie in B durchschneidet und verbinde den Punkt B mit dem Endpunkte A der Hypotenuse AC, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Die Beweise führen sich leicht.

Dritte Auflösung. Da die beiden Dreiecke ABC und abC einander ähnlich sind, so fließt hieraus folgende Proportion:

$$bC : aC = BC : AC$$

also ist

$$BC = \frac{bC \cdot AC}{aC}$$

die Linie $bC = m$, $ab = n$, aus ihnen bestimmt sich aC und es ist

$$aC = \sqrt{n^2 + m^2}$$

führt man diesen Werth für aC ein und setzt man $AC = H$, so erhält man für die eine Kathete folgende Formel

$$1)\quad BC = K = \frac{m \cdot H}{\sqrt{(n^2 + m^2)}}$$

für die andere

$$2)\quad AB = k = \frac{n \cdot H}{\sqrt{(n^2 + m^2)}}$$

§. 180.

Aufgabe. Es ist der Umfang und die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben. Man soll daraus das rechtwinklige Dreieck bilden. Fig. 190.

Erste Auflösung. Der Umfang des rechtwinkligen Dreiecks sey GC, seine Höhe GF. Man beschreibe über der gegebenen Umfangslinie GE einen Bogen, welcher den Winkel $\frac{3}{4}$R faßt, errichte auf dem Endpunkte G die gegebene Höhe GF senkrecht und ziehe durch ihren Endpunkt F die Linie GAA′ parallel mit GE, so wird sie den Kreisbogen in zwei Punkten A und A′ durchschneiden. Nun verbinde man einen Durchschnittspunkt A mit den Endpunkten G und E der Linie GE durch die Linie AG und AE, halbire sie und errichte in ihren Mittelpunkten M und N senkrechte Linien bis zum ihrem Durch-

schnitte in C und B, ziehe AB und AC, so ist ABC gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction sind die Dreiecke AC und CME, GNB und NBA congruent, also die Linie AC CE und GB = BA, der Winkel y = y′ und x = x′, Winkel DAE = ½R.

Hieraus folgt, daß

$$BC + AB + AC = BC + GB + CE = GE$$

ist, und daß also das Dreieck ABC den gegebenen Umfang Da der Winkel GAE = ½R ist, so ist die Summe der den Winkel $x + y = 2R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$

also auch $x' + y' = \frac{1}{2}R$

Hieraus folgt, daß der Winkel

$$BAC = GAE - (x' + y') = \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}R = R$$

ist. Also ist der Winkel BAC ein Rechter und das Dre BAC rechtwinklig.

Die Linie AD ist senkrecht von A auf BC gefällt, und ist der senkrechten Linie GF, da sie mit ihr zwischen denselben Pa lelen liegt, gleich. Das Dreieck BAC hat die gegebene Höh

Anmerkung. Man überzeugt sich leicht, daß die Gestalt Dreiecks BAC von dem Durchschnitte der Parallele FAA′ abhär Es ist ein zweites, nur der Lage nach von dem ersten verschiede Dreieck möglich, wenn man auf den zweiten Durchschnittspunkt des Kreisbogens das nämliche Verfahren, wie vorhin, anwen Es ist nur ein Dreieck möglich, wenn die Parallele FA den Kr bogen nur berührt. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn diese Li den Kreisbogen weder berührt noch durchschneidet.

Zweite Auflösung. Fig. 191. Man bilde aus d halben Umfange AF = ½GE ein Quadrat AFGH und schreibe von dem einen Eckpunkte G des Quadrates mit Quadratseite und von dem entgegengesetzten mit der Höhe AD, Radius, die Kreise HPF und MDN, lege zu beiden die geme schaftliche Tangente BC, so ist ABC das rechtwinklige Drei

Beweis. Die Linien FA und AH sind Tangenten dem Kreise FPH. Wegen des rechten Winkels bei A ist Dreieck ABC rechtwinklig. P und D sind die Punkte, wo die Linie BC die Kreise FPH und MDN berührt. Denn

die Hypotenuse AC und beschreibe über ihr den Halbkreis ABC, verlängere die Kathete Cb bis sie die Peripherie in B durchschneidet und verbinde den Punkt B mit dem Endpunkte A der Hypotenuse AC, so ist ABC das gesuchte rechtwinklige Dreieck.

Die Beweise führen sich leicht.

Dritte Auflösung. Da die beiden Dreiecke ABC und abC einander ähnlich sind, so fließt hieraus folgende Proportion:

$$bC : aC = BC : AC$$

also ist

$$BC = \frac{bC \cdot AC}{aC}$$

Die Linie $bC = m$, $ab = n$, aus ihnen bestimmt sich aC und es ist

$$aC = \sqrt{n^2 + m^2}$$

Führt man diesen Werth für aC ein und setzt man $AC = H$, so erhält man für die eine Kathete folgende Formel

$$1)\quad BC = K = \frac{m \cdot H}{\sqrt{(n^2 + m^2)}}$$

für die andere

$$2)\quad AB = k = \frac{n \cdot H}{\sqrt{(n^2 + m^2)}}$$

§. 180.

Aufgabe. Es ist der Umfang und die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben. Man soll daraus das rechtwinklige Dreieck bilden. Fig. 190.

Erste Auflösung. Der Umfang des rechtwinkligen Dreiecks sey GC, seine Höhe GF. Man beschreibe über der gegebenen Umfangslinie GE einen Bogen, welcher den Winkel $\frac{3}{4}$ R faßt, errichte auf dem Endpunkte G die gegebene Höhe GF senkrecht und ziehe durch ihren Endpunkt F die Linie GAA' parallel mit GE, so wird sie den Kreisbogen in zwei Punkten A und A' durchschneiden. Nun verbinde man einen Durchschnittspunkt A mit den Endpunkten G und E der Linie GE durch die Linie AG und AE, halbire sie und errichte in ihren Mittelpunkten M und N senkrechte Linien bis zum ihrem Durch-

Aus ihr und der Höhe EF läßt sich nach §. 115. leicht rechtwinklige Dreieck ABC bilden, welches das gesuchte ist.

Beweis. Die Linie HF = S ist die mittlere Proportionale zwischen GF = S + h und BF, also ist

$$BC = \frac{S^2}{S+h}$$

folglich $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\frac{S^2}{S+h} = x - H$

Die Katheten bestimmen sich auf folgende Weise; Nennt man die eine Kathete $y = k$, so ist die andere $S - y - x$. Setzt man hierin statt x den für die Hypotenuse gefundenen Werth, so entsteht $k = S - \frac{S^2}{2(S+h)} - y = \frac{S^2 + 2hS}{2(h+S)} - y$ und hieraus nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung $y^2 + \left(\frac{S^2+2Sh}{2(h+S)} - y\right)^2 = \left(\frac{S^2}{2(h+S)}\right)^2$

Die Entwicklung dieser Gleichung führt zu folgender Formel für die eine Kathete

$$2)\quad H = y = \frac{S^2 + 2Sh \mp S\sqrt{S^2 - 4Sh - 4}}{4(S+h)}$$

und für die andere

$$3)\quad k = S - x - y = \frac{S^2 + 2Sh \mp S\sqrt{S^2 - 4Sh - 4}}{4(S+h)}$$

Zweite Analysis. Fig. 192. Nennt man, wie vorhin, die Hypotenuse x, die eine Kathete y, so ist die andere $S - x - y$, und dieß führt zu folgender Gleichung

$$x^2 = y^2 + (S - x - y)^2$$

Hieraus bestimmt sich die Hypotenuse

$$1)\quad x = \frac{2y^2 - 2Sy + S^2}{2S - 2y}$$

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke BAD und ABC fließt folgende Proportion

$$y : x = h : S - x - y$$

und hieraus folgende Gleichung

$$2)\quad x = \frac{Sy - y^2}{h + y}$$

Die Vereinigung beider aber führt zu folgender

$$\frac{2y^2 - 2Sy + S^2}{2S - 2y} = \frac{Sy - y^2}{h + y}$$

Die Entwicklung dieser Gleichung führt zu den nämlichen Bestimmungen, wie oben.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv, oder so lange

$$S^2 - 4Sh > 4h^2$$

ist. Zählt man auf beiden Seiten $4h^2$ zu, so gewinnt man

$$(S - 2h)^2 > 8h^2$$

oder $$S > 2h + \sqrt{8h^2}$$
$$> h(2 + 2\sqrt{2})$$

Hieraus folgt also umgekehrt: Die Aufgabe ist so lange unmöglich, als $h(2 + 2\sqrt{2})$ kleiner als S ist, d. h. sie ist immer unmöglich, wenn der Umfang eben so groß, oder kleiner, als das Vierfache der Höhe ist.

§. 181.

Aufgabe. Es ist die Summe der beiden Katheten und der Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks gegeben. Man soll daraus das Dreieck bilden. Fig. 193.

Auflösung. Die Summe der beiden Katheten sey S, der Inhalt Q^2. Nennt man die eine Kathete x, so ist die andere $S - x$. Da das Produkt der beiden Katheten, den doppelten Inhalt des Dreiecks erzeugt, so gewinnt man folgende Gleichung

$$x(S - x) = 2Q^2$$

oder $$x^2 - xS = -2Q^2$$

und hieraus durch Zuzählen von $(\frac{1}{2}S)^2$

$$(x - \tfrac{1}{2}S)^2 = \tfrac{1}{4}S^2 - 2Q^2$$

also $$x = \tfrac{1}{2}S \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}S^2 - 2Q^2}$$

Da der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen mit beiderlei Zeichen versehen seyn kann, so fragt es sich, mit welchem er versehen seyn müsse? $\frac{1}{2}S$ bedeutet die Hälfte der Katheten-Summe. Sind die beiden Katheten einander ungleich, so folgt leicht, daß die größere Kathete größer, die kleinere kleiner als die Hälfte der Summe seyn müsse und daß also für die größere Kathete die Gleichung

1) $$K = x = \tfrac{1}{2}S + \sqrt{\tfrac{1}{4}S^2 - 2Q^2}$$

Aus ihr und der Höhe EF läßt sich nach §. 115. leicht das rechtwinklige Dreieck ABC bilden, welches das gesuchte ist.

Beweis. Die Linie HF = S ist die mittlere Proportionale zwischen GF = S + h und BF, also ist

$$BC = \frac{S^2}{S + h}$$

folglich $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\frac{S^2}{S + h} = x - H$

Die Katheten bestimmen sich auf folgende Weise; Nennt man die eine Kathete $y = k$, so ist die andere $S - y - x$. Setzt man hierin statt x den für die Hypotenuse gefundenen Werth, so entsteht $k = S - \frac{S^2}{2(S + h)} - y = \frac{S^2 + 2hS}{2(h + S)} - y$

und hieraus nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung $y^2 + \left(\frac{S^2 + 2Sh}{2(h+S)} - y\right)^2 = \left(\frac{S^2}{2(h+S)}\right)^2$

Die Entwicklung dieser Gleichung führt zu folgender Formel für die eine Kathete

$$2)\ K = y = \frac{S^2 + 2Sh \mp S\sqrt{S^2 - 4Sh - 4h^2}}{4(S + h)}$$

und für die andere

$$3)\ k = S - x - y = \frac{S^2 + 2Sh \mp S\sqrt{S^2 - 4Sh - 4h^2}}{4(S + h)}$$

Zweite Analysis. Fig. 192. Nennt man, wie vorhin, die Hypotenuse x, die eine Kathete y, so ist die andere $S - x - y$, und dieß führt zu folgender Gleichung

$$x^2 = y^2 + (S - x - y)^2$$

Hieraus bestimmt sich die Hypotenuse

$$1)\ x = \frac{2y^2 - 2Sy + S^2}{2S - 2y}$$

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke BAD und ABC fließt folgende Proportion

$$y : x = h : S - x - y$$

und hieraus folgende Gleichung

$$2)\ x = \frac{Sy - y^2}{h + y}$$

dem Quadrate der Hypotenuse, also x^2 gleich ist, so führt die Einführung des Gesagten zu folgender Gleichung

$$x^2 + 2Hk = S^2 - 2Sx + x^2$$

oder $$2Hk = S^2 - 2Sx$$

In dieser Gleichung kommen die beiden Katheten als unbekannte Größen vor. Sie lassen sich auf den Flächeninhalt des Dreiecks zurückführen, da letzterer durch sie dargestellt werden kann, und sich so aus der Gleichung entfernen. Berücksichtigt man nämlich, daß der Flächeninhalt des Dreiecks dem halben Produkte aus beiden Kathen gleich, also $\frac{1}{2}H \cdot k = Q^2$ ist, so ist das doppelte Produkt aus beiden Katheten dem vierfachen Flächeninhalt gleich, also $2Hk = 4Q^2$

und hieraus erhält man durch Einführung dieses Werthes in obige Gleichung $4Q^2 = S^2 - 2Sx$

Dieß gibt die Hypotenuse

$$1)\ x = \frac{S^2 - 4Q^2}{2S}$$

Construction. Fig. 194. Der Umfang des Dreiecks sey GE, die Seite des, als Quadrat dargestellten, Flächeninhalts sey ED. Man beschreibe über GE den Halbkreis GFE und trage von dem einen Endpunkte E die doppelte Quadratseite EF = 2ED, als Sehne, in den Halbkreis, fälle vom Endpunkte F die Linie FC senkrecht auf GE, so ist

$$GC = \frac{GF^2}{S} = \frac{GE^2 - EF^2}{S} = \frac{S^2 - 4Q^2}{S}$$

Wird GC halbirt, so gewinnt man die Hypotenuse und es ist

$$BC = \tfrac{1}{2}GC = \frac{S^2 - 4Q^2}{2S} = x = H$$

Ist aber die Hypotenuse gefunden, so ist auch die Summe der beiden Katheten gegeben. Aus diesen Bedingungen läßt sich nun leicht nach einer der Auflösungen im vorigen §. das rechtwinklige Dreieck BAC bilden, welches das gesuchte ist.

Die Katheten bestimmen sich auf folgende Art: Nennt man die eine Kathete y, so ist die andere S — H — y, oder wenn man statt der Hypotenuse H ihren Werth nach der Gleichung 1 setzt, $S - \frac{S^2 - 4Q^2}{2S} - y$.

mungen führen nach dem pythagoräiſchen Lehrſatze
[illegible] Gleichung

$$y^2 + \left(S - \frac{S^2 - 4Q^2}{2S} - y\right)^2 = \left(\frac{S^2 - 4Q^2}{2S}\right)^2$$

Wird dieſe Gleichung entwickelt und y daraus beſtimmt, ſo zieht man für die größere Kathete folgende Formel

$$2)\ K = \frac{S^2 + 4Q^2 + \sqrt{(S^2 + 4Q^2)^2 - 32 \cdot Q^2 S^2}}{4S}$$

für die kleinere folgende

$$3)\ k = \frac{S^2 + 4Q^2 - \sqrt{(S^2 + 4Q^2)^2 - 32Q^2 \cdot S^2}}{4S}$$

Zweite Auflöſung. Nennt man, wie vorhin, die Hypotenuſe x, die eine Kathete y, die andere alſo $S - y - x$, ſo führt der pythagoräiſche Lehrſatz zu folgender Gleichung

$$x^2 = y^2 + (S - x - y)^2$$

und hieraus $1)\ y^2 = -\frac{S^2 + 2Sx + 2Sy - 2xy}{2}$

Das Produkt aus den beiden Katheten iſt dem doppelten Inhalte gleich, alſo $2 \cdot Q^2 = y(S - x - y)$
dieß führt zu folgender Gleichung

$$2)\ y^2 = Sy - xy - 2Q^2$$

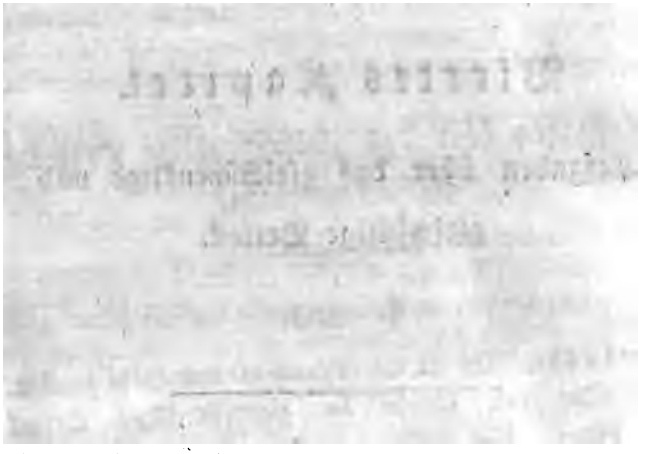
Die Vereinigung der Gleichungen 1 und 2. führt zu der Beſtimmung für die Hypotenuſe

$$x = \frac{S^2 - 4Q^2}{2S}$$

Die weitere Entwickelung fällt mit der oben gegebenen zuſammen.

Viertes Kapitel.

Aufgaben über das gleichschenklige und gleichseitige Dreieck.



A
Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck im Allgemeinen.

§. 183.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und Höhe gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 195.

Auflösung. Die Grundlinie sey BC, die Höhe AD. Man halbire die Grundlinie und errichte in ihrem Mittelpunkte D die Höhe AD senkrecht und vollende das Dreieck ABC; so ist es das gesuchte.

§. 184.

Aufgabe. Es ist der Schenkel und die Höhe gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 195.

Auflösung. Der Schenkel sey AC, die Höhe AD. Man bilde aus dem Schenkel AC, als Hypotenuse, und der Höhe AD, als Kathete, nach §. 75. das Dreieck ADC, verlängere die gefundene Kathete CD, daß DB = DC wird und vollende das Dreieck ABC, so ist es das gesuchte.

§. 185.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und der ihr anliegende Winkel gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 196.

Auflösung. Die Grundlinie sey BC, der Winkel x. Man trage an beide Endpunkte C und B den Winkel x, und verlängere die Schenkel bis zu dem Durchschnitte A, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

§. 186.

Aufgabe. Es ist ein Schenkel und der an der Grundlinie liegende Winkel gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 196.

Auflösung. Der Schenkel sey AC, der Winkel x. Man trage den Winkel an den einen Endpunkt C des Schenkels, verlängere den andern Schenkel unbestimmt und mache AB = AC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

§. 187.

Aufgabe. Es ist der eine Schenkel und der Scheitelwinkel gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 196.

Auflösung. Der Schenkel sey AC, der Winkel y. Man trage auf den Schenkel des Winkels y die Linie AC = AB auf und verbinde die beiden Endpunkte B und C durch die gerade Linie, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

§. 188.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und der Scheitelwinkel gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 197. Die Grundlinie sey BC, der Winkel y. Man schneide von den Schenkeln des Winkels gleiche Stücke Ab und Ac ab, ziehe bc und trage auf diese Linie die Grundlinie BC = bD und ziehe durch den Punkt D

A
Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck im Allgemeinen.

§. 183.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und Höhe gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 195.

Auflösung. Die Grundlinie sey BC, die Höhe AD. Man halbire die Grundlinie und errichte in ihrem Mittelpunkte D die Höhe AD senkrecht und vollende das Dreieck ABC; so ist es das gesuchte.

§. 184.

Aufgabe. Es ist der Schenkel und die Höhe gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 195.

Auflösung. Der Schenkel sey AC, die Höhe AD. Man bilde aus dem Schenkel AC, als Hypotenuse, und der Höhe AD, als Kathete, nach §. 75. das Dreieck ADC, verlängere die gefundene Kathete CD, daß DB = DC wird und vollende das Dreieck ABC, so ist es das gesuchte.

D eine senkrechte Linie DC bis zum Durchschnitte mit beiden Schenkeln, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

§. 191.

Aufgabe. Es ist die Höhe und die Summe des Schenkels und der Grundlinie gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 200.

Auflösung. Es sey die Höhe h, die Summe des Schenkels und der Grundlinie S. Nennt man die Grundlinie x, so ist der Schenkel S — x. Da die von der Spitze des, der Grundlinie gegenüberstehenden, Winkels senkrecht gefällte Linie das ganze Dreieck in zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke theilt, so erhält man durch den pythagoräischen Lehrsatz folgende Gleichung

$$h^2 = (S - x)^2 - \tfrac{1}{4}x^2$$

Wird diese Gleichung entwickelt und geordnet, so entsteht

$$\tfrac{1}{3}(4h^2 - 4S)^2 = x^2 - \tfrac{8}{3}Sx$$

Durch Zuzählen von $(\frac{4}{3}S)^2$ gewinnt man

$$\tfrac{4}{3}h^2 - \tfrac{4}{3}S^2 + \tfrac{16}{9}S^2 = (x - \tfrac{4}{3}S)^2$$

und hieraus

$$x = \tfrac{4}{3}S \pm \sqrt{\tfrac{12}{9}h^2 + \tfrac{4}{9}S^2} = \tfrac{4}{3}S \pm \tfrac{2}{3}\sqrt{3h^2 + S^2}$$

Da $\frac{4}{3}S$ größer als S, und S, die Summe der Grundlinie und des Schenkels, größer als die Grundlinie ist, so muß das Wurzelzeichen mit dem negativen Zeichen versehen seyn, und es gilt für die Grundlinie folgende Gleichung

1) $x = \tfrac{4}{3}S - \tfrac{2}{3}\sqrt{3h^2 + S^2}$

für den Schenkel folgende

2) $k = S - x = \tfrac{2}{3}\sqrt{3h^2 + S^2} - \tfrac{1}{3}S$

Construction. Es sey $h = AB$, $S = AE$. Man bilde aus AB, als Kathete, und der doppelten Höhe $BC = 2h$, als Hypotenuse, das rechtwinklige Dreieck ABC, suche zu der Linie AC und zu AE die Hypotenuse CE, schneide von C aus auf der Linie CE die Linie $AE = CD$ ab, und verlängere die Linie CE um $DE = EF$, wodurch CF entsteht, theile die Linie CF in drei gleiche Theile, so ist ihr dritter Theil CH der gesuchte Schenkel und HD die Grundlinie. Aus je zwei von den gegebenen Stücken läßt sich nun das gesuchte Dreieck HDK leicht bilden.

Beweis.

Beweis. $AC^2 = (2h)^2 - h^2 = 3h^2$; $CE = \sqrt{3h^2 + S^2}$; $EF = DE = \sqrt{3h^2 + S^2} - S$, also ist $CF = CE + CF = 2\sqrt{3h^2 + S^2} - S$ und demnach der gesuchte Schenkel

$$CH = \tfrac{2}{3}\sqrt{3h^2 + S^2} - \tfrac{1}{3}S = S - x = k$$

und die Grundlinie $S - k = \tfrac{4}{3}S - \tfrac{2}{3}\sqrt{3h^2 + S^2}$

§. 192.

Aufgabe. Es ist die Höhe und der Ueberschuß des Schenkels über die Grundlinie gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 201.

Auflösung. Nennt man die Höhe h, den Ueberschuß des Schenkels über die Grundlinie d, die Grundlinie x; so ist der Schenkel $x + d$ und man gewinnt, nach dem pythagoräischen Lehrsatze, folgende Gleichung

$$h^2 = (x + d)^2 - \tfrac{1}{4}x^2$$

Hieraus gewinnt man durch Entwicklung, Versetzung und Zuzählen von $(\frac{4}{3}d)^2$

$$\tfrac{4}{3}h^2 - \tfrac{4}{3}d^2 + \tfrac{16}{9}d^2 = (x + \tfrac{4}{3}d)^2$$

und hieraus bestimmt sich die Grundlinie durch folgende Gleichung

1) $x = \sqrt{\tfrac{4}{3}h^2 + \tfrac{4}{3}d^2} - \tfrac{4}{3}d^2 = \tfrac{2}{3}\sqrt{3h^2 + d^2} - \tfrac{4}{3}d$

der Schenkel durch folgende

2) $k = x + d = \tfrac{2}{3}\sqrt{3h^2 + d^2} - \tfrac{1}{3}d$

Die Construction der letzten Formel fällt genau mit der im vorigen §. gegebenen zusammen.

Anmerkung. Ist der Ueberschuß der Grundlinie über den Schenkel gegeben und wird die Bildung eines gleichschenkligen Dreiecks verlangt, so führt eine ähnliche Behandlung der Aufgabe zum Ziele.

§. 193.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und die Summe der Höhe und des Schenkels gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 201.

Erste Auflösung. Die Grundlinie sey AB, die Summe

der Höhe und des Schenkels sey ED. Man halbire AD u errichte in ihrem Mittelpunkte die Linie ED senkrecht, dar verbinde man den Punkt D mit einem der Endpunkte B d Linie AB durch die Linie DB, halbire sie, ziehe die halbirend Linie CM so, daß sie die Linie DE in dem Punkte C schneid und auf DB senkrecht steht, verbinde C mit A und B, ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Durch die Construction sind die beiden Dreiec DCM und CBM congruent, also auch die Linie CB = CI Demnach ist die Linie DE = CB + CE, d. h. die Sum me des Schenkels und der Höhe ist der Linie DE gleic Ebenso sind nach der Construction die Dreiecke ACE und EC congruent, also auch die Linie AC = CB. Hieraus folg daß das Dreieck ACB gleichschenklig ist und die gegebenen B dingungen erfüllt.

Zweite Auflösung. Nennt man die Grundlinie G die Summe S, den Schenkel x; so ist die Höhe S — x un hieraus hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$x^2 = \tfrac{1}{4}G^2 + (S - x)^2$$

Der Schenkel bestimmt sich leicht durch folgende Gleichung

$$1)\quad x = \frac{\tfrac{1}{4}G^2 + S^2}{2S}$$

die Höhe durch folgende

$$2)\quad h = S - x = \frac{S^2 - \tfrac{1}{4}G^2}{2S}$$

Construction. Fig. 202. Es sey G = AB, S = ED Man suche zur Hälfte der Grundlinie EB und zu ED die Hypote nuse DB; auf dem Endpunkte B der Linie DB errichte man die Linie BF senkrecht und verlängere DE bis zum Durchschnitte F, halbire die Linie DF, so ist CF der gesuchte Schenkel und EG die Höhe. Hieraus läßt sich leicht das Dreieck ACB bilden.

§. 194.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und der Unterschied des Schenkels und der Höhe gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 203.

Erste Auflösung. Die Grundlinie sey AB, der Un-

terschied CD. Man errichte in der Mitte C der Grundlinie AB eine durchschneidende senkrechte Linie und trage auf die eine Seite CD an, verbinde dann den Endpunkt D mit einem der Endpunkte B der Grundlinie und errichte auf dem Mittelpunkte M der Linie DB eine senkrechte Linie ME, daß sie die verlängerte Linie DC in E durchschneide, verbinde A mit E, so ist das Dreieck AEB das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Aus der Construction folgt die Congruenz der Dreiecke DEM und EBM, also auch der Linien DE und BE. Da nun ED — EC = CD ist, so ist auch EB — EC = CD, d. h. die Linie CD ist der Unterschied zwischen der Linie EB und EC. Auf eine ganz leichte Weise zeigt sich, daß die Linie AE = EB ist, und daß also AEB ein gleichschenkliges Dreieck ist, das die Linie AB als Grundlinie hat, und zugleich die Linie CD als Schenkel und HöhenUnterschied hat.

Zweite Auflösung. Es sey die Grundlinie G, der Unterschied d, nennt man die Höhe x, so ist der Schenkel x + d und man hat nach dem pythagoräischen Lehrsatze als Gleichung für die Grundlinie

$$\tfrac{1}{4}G^2 = (x + d)^2 - x^2 = x^2 + 2dx + d^2 - x^2$$

Hieraus bestimmt sich die Höhe durch folgende Gleichung

$$1)\quad x = \frac{\frac{1}{4}G^2 - d^2}{2d}$$

der Schenkel durch folgende

$$2)\quad k = x + d = \frac{\frac{1}{4}G^2 + d^2}{2d}$$

Construction. Fig. 204. Es sey G = AB, d = CD. Man bilde aus der halben Grundlinie DF, als Hypotenuse, und CD, als Kathete, das Dreieck CDF und errichte auf dem Endpunkt F der Linie DF eine senkrechte Linie, daß sie die verlängerte DC in einem Punkte G schneide, halbire CG in E, so ist EC die Höhe und ED der gesuchte Schenkel. Hieraus läßt sich leicht das Dreieck AEB nach §. 184. bilden.

§. 195.

Aufgabe. Es ist die Summe der Höhe und Grund-

linie und der Schenkel gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 205

Auflösung. Nennt man den Schenkel k, die Summe der Höhe und Grundlinie S, die Höhe x, so ist die Grundlinie S — x, und man hat nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$k^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}(S - x)^2$$

Wird diese Gleichung entwickelt und geordnet, so entsteht

$$\tfrac{5}{4}k^2 - \tfrac{1}{4}S^2 = x^2 - \tfrac{2}{4}Sx$$

Zählt man $(\frac{1}{5}S)^2$ zu, so entsteht

$$\tfrac{4}{5}k^2 - \tfrac{4}{25}S^2 = (x - \tfrac{1}{5}S)^2$$

und hieraus gewinnt man

$$x = \tfrac{1}{5}S \pm \sqrt{\tfrac{20}{25}k^2 - \tfrac{4}{25}S^2} = \tfrac{1}{5}S \pm \tfrac{2}{5}\sqrt{5k^2 - S^2}$$

Da das Wurzelzeichen mit dem positiven oder negativen Zeichen versehen seyn kann, so fragt es sich mit welchem es versehen seyn müsse? Es ist klar, daß der gegebene Schenkel entweder größer, eben so groß, oder kleiner seyn kann, als die halbe Summe der Höhe und Grundlinie. Nimmt man an, daß er der Hälfte der gegebenen Summe gleich sey, also $k = \frac{1}{2}S$ und führt diesen Werth in obige Formel ein, so gewinnt man für diesen Fall bei positivem Zeichen folgende Bestimmung für die Höhe

$$x = \tfrac{1}{5}S + \tfrac{1}{5}S = \tfrac{2}{5}S$$

bei negativem Zeichen

$$x = \tfrac{1}{5}S - \tfrac{1}{5}S = 0$$

Das positive Zeichen führt daher zu einem reellen Werthe, das negative zur Null, also zu keinem Werthe für die Höhe, und in diesem Falle ist der Ausdruck $\frac{2}{5}\sqrt{5k^2 - S^2}$ in $\frac{1}{5}S$ übergegangen. Nimmt man nun an, daß k größer als $\frac{1}{2}S$ werde, so wird auch der aus dem Ausdrucke $\frac{2}{5}\sqrt{5k^2 - S^2}$ hervorgehende Ausdruck größer als $\frac{1}{5}S$ werden, und es würde, wenn dann das Wurzelzeichen mit negativem Zeichen versehen seyn würde, ein unmöglicher Werth entstehen. Dieß führt zu dem Schlusse, daß das Wurzelzeichen mit einem positiven Zeichen versehen seyn muß, wenn der Schenkel größer, oder eben so groß, als die halbe Summe der Grundlinie und Höhe ist.

Wird aber der Schenkel kleiner als $\frac{1}{5}S$, so wird der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen so lange einen positiven Werth erzeugen, als $5k^2 - S^2$ größer; als o oder $= o$ bleibt. In diesen Fällen ist der Werth des Ausdrucks $\frac{2}{5}\sqrt{5k^2 - S^2}$ in den Gränzen von $\frac{1}{5}S$ und o eingeschlossen. Daher wird also der hieraus entstehende Ausdruck kleiner als $\frac{1}{5}S$ seyn, und in allen diesen Fällen werden vor dem Wurzelausdrucke beide Zeichen stehen können. Hieraus fließen folgende Bestimmungen: die Aufgabe ist bestimmt, wann der Schenkel eben so groß oder größer, als die Hälfte der Summe ist, und es gilt folgende Gleichung

$$1)\quad h = x = \tfrac{1}{5}S + \tfrac{2}{5}\sqrt{5k^2 - S^2}$$

und dann, wann die Höhe der vierte Theil der Grundlinie ist, weil dann der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in o übergeht.

Sie ist unbestimmt, wann der Schenkel kleiner, als die Hälfte der gegebenen Summe ist. Alsdann gilt folgende Formel

$$2)\quad x = \tfrac{1}{5}S \pm \tfrac{2}{5}\sqrt{5k^2 - S^2}$$

Die Grundlinie bestimmt sich durch folgende Gleichung

$$3)\quad G = S - x = \tfrac{4}{5}S \pm \tfrac{2}{5}\sqrt{5k^2 - S^2}$$

Construction. Fig. 205. Es sey $k = AB$ und $S = AC$. Da AB größer als $\frac{1}{5}AC$ ist, so gilt die erste Formel. Man suche zu AB und zu $2AB = AE$ die Hypotenuse EB, trage von A aus auf AB die Linie AC an, suche zu AC und $BE = DC$ die Kathete AD, verdopple AD, wodurch AF entsteht und verlängere AF um die Linie $AC = AG$, wodurch FG entsteht, suche von FG den fünften Theil GH, so ist dieses die gesuchte Höhe und AH die Grundlinie. Aus zwei von den gegebenen Linien läßt sich nun das gesuchte Dreieck AHM leicht bilden.

Anmerkung. Die Aufgabe ist so lange möglich, als der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen keine negative Größe erzeugt. Sie wird unmöglich, sobald dieselbe eine negative Größe werden sollte; also wenn

$$5k^2 < S^2$$

oder

$$K < \tfrac{1}{5}S$$

d. h. wenn der Schenkel kleiner, als der fünfte Theil der Summe der Höhe und Grundlinie werden sollte.

§. 196.

Aufgabe. Es ist der Schenkel und der Ueberschuß der Höhe über die Grundlinie gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 20

Auflösung. Nennt man den Schenkel k, den Ueberschuß der Höhe über die Grundlinie d, die Grundlinie x, so ist die Höhe x + d, und hieraus gewinnt man nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$k^2 = \tfrac{1}{4}x^2 + (x + d)^2 = \tfrac{5}{4}x^2 + 2xd + d^2$$

oder

$$\tfrac{5}{4}k^2 - \tfrac{5}{4}d^2 = x^2 + \tfrac{2}{1}xd$$

Zählt man auf beiden Seiten $(\frac{2}{1}d)^2$ zu, so entsteht

$$\tfrac{5}{4}k^2 - \tfrac{5}{4}d^2 + \tfrac{4}{1}d^2 = (x + \tfrac{2}{1}d)^2$$

und hieraus bestimmt sich die Grundlinie durch folgende Gleichung 1) $x = \sqrt{\frac{20}{25}k^2 - \frac{4}{25}d^2} - \frac{2}{5}d = \frac{2}{5}\sqrt{5k^2 - d^2} -$ die Höhe durch folgende

2) $h = x + d - \frac{1}{5}d + \frac{2}{5}\sqrt{5k^2 - d^2}$

Fig. 206. gibt nach dem vorigen § die Construction an.

§. 197.

Aufgabe. Es ist die Summe des Schenkels der Grundlinie und der Scheitelwinkel gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 207. Der Scheitelwinkel sei die Summenlinie AE. Man trage auf den einen Schenkel Winkels x = BAC die Summenlinie AE, und lege an i Endpunkte E den Winkel $AEB = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}\alpha$ und ziehe Linie EB bis zum Durchschnitte des andern Schenkels. errichte man im Mittelpunkte M der Linie BE die Linie senkrecht bis zum Durchschnitte C der Summenlinie AE; BC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist das Dreieck gleichschenklig, also ist

$$AC + CB = AC + CE = AE$$

und das Dreieck ABC hat die gegebene Summe des Schen und der Grundlinie.

Ferner ist der Winkel $x = x' = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}\alpha$; also auch der Winkel $y = 2(\frac{1}{2}R - \frac{1}{4}\alpha) = R - \frac{1}{2}\alpha$

Der Winkel $BAC = \alpha$, also ist der dritte Winkel

$$y' = 2R - \alpha - (R - \tfrac{1}{2}\alpha) = R - \tfrac{1}{2}\alpha$$

Die Winkel y und y' sind demnach einander gleich, also ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

Zweite Auflösung. Fig. 208. Die Summenlinie sey BE. Man trage an den einen Endpunkt B der Linie BE die Hälfte des Nebenwinkels von α, $ABE = R - \frac{1}{2}\alpha$, an den andern den vierten Theil dieses Nebenwinkels $BEA = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}\alpha$ und verlängere die Schenkel dieser Winkel bis zum Durchschnitte A. Errichte im Mittelpunkte M von AE die senkrechte Linie MC bis zum Durchschnitte C der Summenlinie, ziehe AC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Das Dreieck ACE ist nach der Construction gleichschenklig, also ist $x = x'$ und $AC = CE$. Hieraus fließt 1) $BC + AC = BC + CE = BE$

2) $y = x + x' = 2(\frac{1}{2}R - \frac{1}{4}\alpha) = R - \frac{1}{2}\alpha = y'$

3) $BAC = 2R - y - y' = 2R - 2(R - \frac{1}{2}\alpha) = \alpha$.

§. 198.

Aufgabe. Es ist der Scheitelwinkel und der Ueberschuß des Schenkels über die Grundlinie gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 209. Der Scheitelwinkel sey α, die Ueberschuß-Linie AE. Man trage auf den einen Schenkel des Winkels α den Ueberschuß AE auf, lege an den Endpunkt E auf der Verlängerung von AE den Winkel $BEC = \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\alpha$, und ziehe EB bis zum Durchschnitte B des andern Schenkels, mache $AC = AB$ und ziehe BC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und hat den Scheitelwinkel α, also ist der Winkel $ABC = ACB = R - \frac{1}{2}x$. Da ferner der Winkel $BEC = \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\alpha$ ist, so ist der Winkel

$EBC = 2R - (R - \frac{1}{2}x) - (\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}x) = \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}x$

und folglich ist auch BEC ein gleichschenkliges Dreieck und E
= EC; geht man von der Linie BC auf die Linie AC über
so ist AE = AC — EC = AC — BC
Das Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Fig. 210. Der Ueberschuß sey CE. Man trage an dem einen Endpunkte C auf die Verlängerung von EC den Winkel $ACB = R - \frac{1}{2}\alpha$ und an den andern E den Winkel $AEC = \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\alpha$ und verlängere beide Schenkel bis zum Durchschnittspunkte A, mache AB = AC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Da ABC ein gleichschenkliges Dreieck ist, so ist der Winkel $x = x' = R - \frac{1}{2}\alpha$, und also $y = 2R - 2(R - \frac{1}{2}\alpha) = \alpha$.
Da $x' = R - \frac{1}{2}\alpha$ und $z = \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\alpha$; so ist der Winkel $BAE = 2R - x' - z = 2R - (R - \frac{1}{2}\alpha) - (\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\alpha) = \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\alpha$; also ist der Winkel BAE = z und das Dreieck ABE gleichschenklig und folglich
EC = BE — BC = AB — BC.

§. 199.

Aufgabe. Es ist der Scheitelwinkel und der Ueberschuß der Grundlinie über den Schenkel gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 211. Die Ueberschußlinie sey AE, der Scheitelwinkel α. Man verlängere den einen Schenkel des Scheitelwinkels $\alpha = BAC$ durch die Spitze A um AE und trage an dem Endpunkte E den Winkel $AEC = \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\alpha$ und verlängere seinen Schenkel bis zum Durchschnitte C mit AC, mache AB = AC und ziehe BC; so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Zweite Auflösung. Fig. 212. Die Ueberschußlinie sey EC. Man trage an den einen Endpunkt C der Linie EC den Winkel $ECA = R - \frac{1}{2}\alpha$ und an den andern auf die Verlängerung von CE den Winkel $AEB = \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}\alpha$ und ziehe die Linie EA und CA bis zu ihrem Durchschnitte A,

mache AB = AC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Die Beweise zu diesen Auflösungen führen sich wie die im vorigen §en.

§. 200.

Aufgabe. Es ist der Scheitelwinkel und die Summe des Schenkels und der Höhe gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 213. Der Scheitelwinkel sey α, die Summenlinie DE. Man errichte auf dem einen Endpunkte D der Summenlinie eine durchschneidende senkrechte Linie BC und an den andern Endpunkt lege man den Winkel $CED = \frac{1}{4}\alpha$, verlängere seinen Schenkel bis zum Durchschnitte C mit der senkrechten Linie BC, errichte in dem Mittelpunkte M eine senkrechte Linie MA bis zum Durchschnitte A der Summenlinie und ziehe AC und AB = AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck; denn es läßt sich leicht beweisen, daß

$$AD + AC = AD + AE = DE$$

und daß der Winkel $BAC = \alpha$ ist.

Zweite Auflösung. Fig. 214. Die Summenlinie sey EC. Man bilde aus ihr und den Winkeln $ECD = R - \frac{1}{2}\alpha$ und $DEC = \frac{1}{4}\alpha$ das Dreieck EDC, halbire ED durch die senkrechte Linie MA, mache AB = AC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Der Beweis führt sich leicht.

§. 201.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen dem Schenkel und der Höhe und der Scheitelwinkel gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 215. Der Unterschied sey DE, der Scheitelwinkel α. Man errichte an dem einen Endpunkte D der Unterschiedslinie eine senkrechte durchschneidende Linie und an den andern E lege man den Winkel $DEC = R - \frac{1}{4}\alpha$, und ziehe EC bis zum Durchschnitte C der Linie DC. Nun

verlängere man ED und errichte in dem Mittelpunkte M der Linie CE eine senkrechte Linie MA bis zum Durchschnitte A der verlängerten Unterschiedslinie, ziehe AC und mache AB = AC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist das Dreieck ABC und das Dreieck AEC gleichschenklig; folglich ist der Winkel ACB = ABC = ACE — DCE = R — $\frac{1}{2}\alpha$, und also ist der Scheitelwinkel BAC = α; ferner ist AE = AC, also ED = AC — AD = AC — AD, d. h. der Schenkel ist um DE größer, als die Höhe.

Zweite Auflösung. Fig. 216. Der Unterschied sey EC. Man trage an den einen Endpunkt der Unterschiedslinie den Winkel ECD = R — $\frac{1}{2}\alpha$, an den andern E den Winkel CED = R — $\frac{1}{2}\alpha$ und verlängere die beiden Schenkel bis zum Durchschnitte D. Nun halbire man die Linie DE durch eine senkrechte; verlängere CE bis zum Durchschnitte A mit der senkrechten MA, verlängere CD und mache AB = AC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreiecke.

Der Beweis führt sich leicht.

Anmerkung. Zwei andere Auflösungen bekommt man, wenn man Fig. 215 und 216. nach der Bildung des Dreiecks CDE die Linie DB = DC macht und AB zieht.

§. 202.

Aufgabe. Es ist der Scheitelwinkel und die Summe der Höhe und Grundlinie gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 217.

Auflösung. Die gegebene Summe sey MC und der Scheitelwinkel α. Man halbire den Scheitelwinkel α und ziehe die halbirende Linie AD unbestimmt, errichte in irgend einem Punkte E die Linie FEL senkrecht und trage auf sie die Linie MC = FL, ferner schneide man auf der Linie HK = EA ab und ziehe die unbestimmte Linie AKM, und von dem Punkt L mit dem gegenüberstehenden Schenkel AC die Linie LM parallel, daß sie die Linie AM in irgend einem Punkte M schneide und lege durch diesen Punkt M eine Linie MC mit LF parallel, so daß von ihr die Schenkel des Winkels BAC durch-

schnitten werden, so ist das hiedurch entstandene Dreieck ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction sind die Linien LF und MC einander und der gegebenen Summe gleich und laufen mit einander parallel. Aus letzterer Bemerkung folgt, daß die Dreiecke MBA und KHA, BDA und HEA einander ähnlich sind; dieß führet zu folgenden Proportionen

$$KH : MB = AH : AB$$

und

$$AE : AD = AH : AB$$

aus beiden ergibt sich folgende dritte

$$KH : MB = AE : AD.$$

Da nun KH = AE ist, so folgt aus dieser Proportion, daß auch MB = AD seyn müsse. Hieraus folgt, daß MB + BC = AD + BC ist, und daß also das Dreieck ABC den gegebenen Winkel, die gegebene Summe der Höhe und Grundlinie enthält und gleichschenklig ist.

§. 203.

Aufgabe. Es ist der Scheitelwinkel und der Ueberschuß der Höhe über die Grundlinie gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 218.

Auflösung. Der gegebene Ueberschuß sey CE, der Scheitelwinkel α. Man halbire durch eine gerade Linie AD den gegebenen Scheitelwinkel α und ziehe in einem Punkte d der Linie AD auf diese die senkrechte Linie bde, welche die beiden Schenkel des Winkels AB und AC in b und c durchschneidet, schneide von dem einen Durchschnittspunkte b die Linie AD = be auf dieser Grundlinie ab, trage von e aus den Unterschied CE = ef auf eb, und ziehe von A durch e die Linie AE und mit dieser von dem Punkte f aus die Linie fC parallel, bis sie die verlängerte AC durchschneidet, so ist AC der Schenkel des gesuchten Dreiecks, woraus sich nach §. 187. oder durch eine Parallele mit be leicht das gleichschenklige Dreieck ABC, welches das gesuchte ist, construiren läßt.

Beweis. Vermöge der Construction läuft die Linie BE

mit be parallel, also sind die Dreiecke Abe und ABE einander ähnlich und erzeugen folgende Proportion

$$Ab : AB = be : BE$$

ferner

$$Ab : AB = Ad : AD$$

und hieraus durch Vereinigung folgende

$$be : Ad = BE : AD$$

Da aber be = Ad ist, so ist auch BE = AD und folglich BE — BC = CE. Die Linie CE aber ist, als zwischen zwei Parallen fC und eE und mit der Linie fe parallel laufend, der Linie fe, also auch dem gegebenen Unterschiede gleich. Demnach führt das Dreieck ABC den gegebenen Scheitelwinkel und den gegebenen Ueberschuß der Höhe über die Grundlinie.

Anmerkung. Auf ähnliche Art läßt sich ein gleichschenkliges Dreieck bilden, wenn der Scheitelwinkel und der Ueberschuß der Grundlinie über die Höhe gegeben ist. Fig. 219.

§. 204.

Aufgabe. Es ist der Schenkel und die Summe des Scheitelwinkels und des Winkels an der Grundlinie gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 220.

Auflösung. Die Summe der beiden Winkel sey ACE, der Schenkel AC. Man verlängere den einen Schenkel CE unbestimmt durch die Spitze C und auf den andern trage man den gegebenen Schenkel AC an, mache AB = AC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck, wie sich leicht beweisen läßt.

§. 205.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und die Summe des Scheitelwinkels und des Winkels an der Grundlinie gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 220.

Auflösung. Die Grundlinie sey BC und die Summe des Winkels an der Grundlinie und an der Spitze sey ACE. Man verlängere die Grundlinie BC auf beiden Seiten und trage an die beiden Punkte B und C der Grundlinie den Win-

einander ACE = ABF an, daß immer ein Schenkel auf die verlängerte Grundlinie falle, verlängere die beiden andern Schenkel bis sie sich in einem Punkte A durchschneiden, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck, wie sich leicht zeigen läßt.

§. 206.

Aufgabe. Es ist die Höhe und die Summe des Winkels an der Spitze und Grundlinie gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 221.

Auflösung. Die Höhe sey AD, die Summe der Winkel ACE. Man bilde aus der Höhe AD, als Kathete, und dem Nebenwinkel ACD von dem gegebenen Summenwinkel, als gegenüberstehendem Winkel, das Dreieck ADC, verlängere CD und mache AB = AC, oder BD = DC und ziehe im letzten Falle AB, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Der Beweis fährt sich leicht.

§. 207.

Aufgabe. Es ist die Summe der Höhe und Grundlinie und die der Höhe und des Schenkels gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden, Fig. 222.

Auflösung. Die Summe der Höhe und Grundlinie sey S, die der Höhe und des Schenkels s. Nennt man die Höhe x, so ist die Grundlinie S − x und der Schenkel s − x, und hieraus ergibt sich nach dem pythagoräischen Lehrsatze für die halbe Grundlinie, die Höhe und den Schenkel folgende Gleichung

$$(s - x)^2 - x^2 = \tfrac{1}{4}(S - x)^2$$

Wird diese Gleichung entwickelt und geordnet, so entsteht

$$4s^2 - S^2 = x^2 + 2(4s - S)x$$

Zählt man $(4s - S)^2$ auf beiden Seiten zu, so entsteht

$$(4s - S)^2 + 4s^2 - S^2 = (x + 4s - S)^2$$

und hieraus bestimmt sich die Höhe

$$1)\ x = \sqrt{(4s - S)^2 + 4s^2 - S^2} - (4s - S)$$

die Grundlinie

2) $G = S - x = \frac{1}{4}s - \sqrt{(4s - S)^2 + 4s^2 - S^2}$

der Schenkel

3) $k = S - x = 5s - S - \sqrt{(4s - S)^2 + 4s^2 - S^2}$

Construction der Grundlinie. Es sey die Summe der Höhe und Grundlinie $S = AB$, die des Schenkels und der Höhe $s = AC$. Man trage zwei unbestimmte Linien senkrecht aneinander und auf die eine die Linie AB und $4s = AE$. Schneide von E aus die Linie $ED = AB$ ab, und trage von B aus die Linie $BF = 2s$ so auf, daß ihr Endpunkt F in die senkrechte AF falle, verbinde die Punkte F und D durch eine gerade Linie FD und schneide $FD = AK$ von AE ab, so ist die Linie KE die gesuchte Grundlinie und DK die Höhe, woraus sich leicht nach §. 183. das Dreieck bilden läßt.

§. 208.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Höhe und dem Schenkel und der Ueberschuß der Höhe über die Grundlinie gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 223.

Auflösung. Nennt man den Unterschied zwischen Schenkel und Höhe D, den Ueberschuß der Höhe über die Grundlinie d, die Höhe x, so ist der Schenkel $x + D$ und die Grundlinie $x - d$, und hieraus fließt zwischen der halben Grundlinie, der Höhe und dem Schenkel folgende Gleichung

$$(x + D)^2 - x^2 = \tfrac{1}{4}(x - d)^2$$

Entwickelt und ordnet man diese Gleichung, so wird

$$4D^2 - d^2 = x^2 - 2(4D + d)x$$

Wird $(4D + d)^2$ auf beiden Seiten zugezählt, so entsteht

$$(4D + d)^2 + 4D^2 - d^2 = [x - (4D + d)]^2$$

und hieraus

$$x = 4D + d \pm \sqrt{(4D + d)^2 + 4D^2 - d^2}$$

Da vor dem Wurzelzeichen das positive oder negative Zeichen stehen kann, so fragt es sich, welches stehen müsse? Es erhellt sogleich, daß je kleiner die Grundlinie im Verhältniß

zur Höhe ist, desto größer der Unterschied zwischen beiden d, daß auch zugleich der Unterschied zwischen Schenkel und Höhe D, immer kleiner werde, und daß daher $4D + d$ immer kleiner, als die Höhe seyn werde. Hieraus ergibt sich also, daß das positive Zeichen vor dem Wurzelzeichen stehen müsse. Es ist daher die Gleichung für die Höhe

1) $x = 4D + d + \sqrt{(4D + d)^2 + 4D^2 - d^2}$

für den Schenkel

2) $k = x + D = 5D + d + \sqrt{(4D + d)^2 + 4D^2 - d^2}$

für die Grundlinie

3) $G = x - d = 4D + \sqrt{(4D + d)^2 + 4D - d^2}$

Construction der Grundlinie. Es sey der Unterschied zwischen Schenkel und Höhe $D = AC$ und der Ueberschuß der Höhe über die Grundlinie $d = AB$. Man setze zwei unbegränzte Linien unter einem rechten Winkel aneinander, trage auf die eine den Ueberschuß der Höhe über die Grundlinie AB und $4D = BE$, und auf die andere $2D = AD$; ziehe ED, trage von dem Punkte B die Linie $BF = ED$ auf und reihe an AF die Linie $FH = 4D$, so ist die Linie AH die Grundlinie des zu suchenden gleichschenkligen Dreiecks. Wird AH um $HG = d$ vergrößert, so ist AG die Höhe, woraus sich leicht nach §. 183. das Dreieck AHP vollenden läßt.

§. 209.

Aufgabe. Es ist der Umfang und die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks gegeben. Man soll daraus das Dreieck bestimmen. Fig. 224.

Erste Auflösung. Der Umfang sey BC, die Höhe AD. Man halbire die Linie BC und errichte in ihrem Mittelpunkte D die gegebene Höhe AD senkrecht, ziehe dann von dem Punkte A auf die Endpunkte von BC die Linie AB und AC, trage auf die Linien AC und AB an dem Punkte A die Winkel $x' = x$ und $y' = y$, verlängere ihre Schenkel bis sie die Linie BC in E und F treffen, so ist EDF das gesuchte Dreieck.

Beweis. Aus der Construction erhellt, daß die Dreiecke ABD und ADC congruent und die Linien AB und AC gleich

§. 211.

Aufgabe. Es iſt die Grundlinie und die dem W
kel zugehörige Höhe gegeben. Man ſoll d
ein gleichſchenkliges Dreieck bilden. Fig. 22

Auflöſung. Die Grundlinie ſey BC, die Höh
Man beſchreibe über der Grundlinie BC einen Halbkrei
ziehe von den beiden Endpunkten B und C aus die ge
Höhe BE als Sehne, in den Halbkreis, ſo daß BE =
werde, und ziehe durch die Punkte B und F, C und E
die Linien CA bis zu ihrem Durchſchnitte A, ſo iſt AB
geſuchte gleichſchenklige Dreieck.

Beweis. Nach der Conſtruction iſt die Linie BE =
beide Linien ſtehen ſenkrecht auf BA und AC und bilde
bei F und E rechte Winkel. Die Dreiecke FAC und
ſind congruent, weil die Linie FC = BE, die Winkel
und S Rechte ſind und der bei A zu beiden gehört.
Dreiecke BEC und BEC ſind congruent, weil BC = B
EA = CF und der F und C rechte Winkel ſind. H
ſind die Schenkel der Linien BA und AC. Das Drei
hat die gegebene Grundlinie und di
Schenkel zugehörige Höhe BE.

Zweite Auflöſung. Nennt man die Grundlin
die ihr zugehörige Höhe x. Die Höhe h, den ihr zugeh
Schenkel y, ſo iſt das Produkt aus der Grundlinie un
der zugehörigen Höhe, dem Produkte aus dem Schenke
der ihm zugehörigen Höhe gleich, und alſo

$$Hy = Gx$$

alſo $$y = \frac{Gx}{H}$$

ferner hat man nach dem pythagoräiſchen Lehrſatze zwiſch
Grundlinie und der Höhe und dem Schenkel folgende

$$y^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}G^2$$

Summe der Höhe und Grundlinie sey S. Nennt man die Grundlinie x, so ist die Höhe S — x. Da nun der Inhalt dem halben Produkte der Höhe und Grundlinie gleich ist, so gewinnt man hieraus folgende Gleichung

$$Q^2 = \tfrac{1}{2}(S - x) \,.\, x = \tfrac{1}{2} Sx - \tfrac{1}{2} x^2$$

oder $$2Q^2 = Sx - x^2$$

durch Versetzung der Zeichen und durch Zuzählen von $(\frac{1}{2}S)^2$ entsteht $$x^2 - Sx + \tfrac{1}{4}S^2 = \tfrac{1}{4}S^2 - 2Q^2$$

und hieraus $$x = \tfrac{1}{2}S \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}S^2 - 2Q^2}$$

Beide Zeichen, das positive und negative, erzeugen einen reellen Werth, und es können daher beide vor dem Wurzelzeichen stehen. Wird das positive Zeichen gesetzt, so wird die Grundlinie größer als die Höhe seyn, wird das negative Zeichen gesetzt, so wird sie kleiner als die Höhe seyn. Daher gibt es zwei Auflösungen der obigen Aufgabe und die Aufgabe ist unbestimmt. Sie wird bestimmt, sobald das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe angegeben ist. Es gilt also die Formel

$$x = \tfrac{1}{2}S + \sqrt{\tfrac{1}{4}S^2 - 2Q^2}$$

wenn die Grundlinie größer als die Höhe ist, und

$$x = \tfrac{1}{2}S - \sqrt{\tfrac{1}{4}S^2 - 2Q^2}$$

wenn die Grundlinie kleiner als die Höhe ist.

Construction der ersten Formel. Es sey Q = AB und die Summe der Höhe und Grundlinie S = AC. Man trage zwei unbestimmte Linien unter einem rechten Winkel aneinander und auf sie von A aus AB = Q und AD = Q und ziehe DB, trage diese Linie DB = AE von A aus auf AB und von E aus die Linie EF = $\frac{1}{2}$ S = $\frac{1}{2}$ AC so, daß ihr Endpunkt F in die Linie AH falle, wodurch AF entsteht, trage an diese Linie FH = $\frac{1}{2}$ S = $\frac{1}{2}$ AC, so ist die Linie AH die gesuchte Höhe und AC — AH = GK die gesuchte Grundlinie. Aus beiden Linien läßt sich nach §. 183. leicht das gleichschenklige Dreieck GHK bilden.

§. 211.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und die dem Schenkel zugehörige Höhe gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 227.

Auflösung. Die Grundlinie sey BC, die Höhe BE. Man beschreibe über der Grundlinie BC einen Halbkreis und trage von den beiden Endpunkten B und C aus die gegebene Höhe BE, als Sehne, in den Halbkreis, so daß BE = CF werde, und ziehe durch die Punkte B und F, C und E gerade Linien CA bis zu ihrem Durchschnitte A, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist die Linie BE = CF, beide Linien stehen senkrecht auf BA und AC und bilden also bei F und E rechte Winkel. Die Dreiecke FAC und BEA sind congruent, weil die Linie FC = BE, die Winkel bei F und E Rechte sind, und der bei A zu beiden gehört. Die Dreiecke BFC und BEC sind congruent, weil BC = BC und BE = CF und bei F und C rechte Winkel sind. Hieraus folgt die Gleichheit der Linien BA und AC. Das Dreieck ist also gleichschenklig, hat die gegebene Grundlinie und die dem Schenkel zugehörige Höhe BE.

Zweite Auflösung. Nennt man die Grundlinie G, die ihr zugehörige Höhe x. Die Höhe h, den ihr zugehörigen Schenkel y, so ist das Produkt aus der Grundlinie und der ihr zugehörigen Höhe, dem Produkte aus dem Schenkel und der ihm zugehörigen Höhe gleich, und also

$$Hy = Gx$$

also 1) $$y = \frac{Gx}{H}$$

ferner hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze zwischen der Grundlinie und ihrer Höhe und dem Schenkel folgende Gleichung 2) $$y^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}G^2$$

Erhebt man die erste Gleichung ins Quadrat, so gewinnt man durch Vereinigung von 1 und 2 folgende dritte

$$\frac{G^2 x^2}{H^2} = x^2 + \frac{1}{4} G^2$$

oder

$$\frac{G^2 - H^2}{H^2} x^2 = \frac{1}{4} G^2$$

und hieraus bestimmt sich die der Grundlinie zugehörige Höhe

$$3) \quad x = \frac{H \cdot G}{2\sqrt{(G^2 - H^2)}}$$

der Schenkel

$$4) \quad k = \frac{G x}{H} = \frac{G^2}{2\sqrt{(G^2 - H^2)}}$$

§. 212.

Aufgabe. Es ist der Schenkel und die ihm zugehörige Höhe gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 228.

Erste Auflösung. Der Schenkel sey AC, seine Höhe BE. Man beschreibe über AC einen Halbkreis AFC, trage von dem einen Endpunkte C die Höhe BE = CF, als Sehne, in den Halbkreis und ziehe durch A und F eine gerade Linie und mache AB = AC und ziehe BC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Die Linie AB = AC, also ist ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit dem gegebenen Schenkel. Die Linie CF steht senkrecht auf AB und CF = BE, also hat das Dreieck auch die gegebene Höhe. Die den beiden Schenkeln zugehörigen Höhen sind einander gleich, also erfüllt das Dreieck ABC die gegebenen Bedingungen.

Zweite Auflösung. Nennt man den Schenkel k, seine Höhe h, die Grundlinie x, ihre Höhe y, so hat man folgende Gleichung

$$h \cdot k = x \cdot y, \text{ also } y = \frac{h k}{x}$$

nach dem pythagoräischen Lehrsatze aber folgende

$$k^2 - \frac{1}{4} x^2 = y^2$$

Erhebt man die erste Gleichung in das Quadrat, so gewi
man durch Vereinigung

$$\frac{h^2\,k^2}{x^2} = k^2 - \tfrac{1}{4}x^2$$

Aus dieser Gleichung leitet sich folgende Bestimmung für
Grundlinie ab 1) $x = \sqrt{2k^2 - 2k\sqrt{(k^2 - h^2)}}$
für ihre Höhe

$$2)\quad y = \frac{h\,k}{x} = \frac{h\,k}{\sqrt{[2k^2 - 2k\sqrt{(k^2 - h^2)}]}}$$

§. 213.

Aufgabe. Es ist der Schenkel gegeben. Man s
über ihm ein gleichschenkliges Dreieck bilden, wor
der Winkel an der Grundlinie doppelt so gro
als der Scheitelwinkel ist. Fig. 229.

Auflösung. Der Schenkel sey AC. Man theile denk
ben durch den Punkt D in das innere und äussere Verhältn
so, daß CD : DA = DA : AC sich verhält, und beschrei
über CD mit DA ein gleichschenkliges Dreieck CBD und zi
BA, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist BC = BD = Al
Hieraus fließen folgende Proportionen

$$CD : AD = AD : CA$$

oder

$$CD : BC = CB : CA$$

Die beiden Dreiecke BCD und ACB haben den Winkel bei
gemeinschaftlich, dieser Winkel wird von den Linien CD u
CB, CB und CA umschlossen, welche zu einander in gleich
Verhältnisse stehen. Dieß führt zu dem Schlusse, daß
Dreiecke BCD und ABC einander ähnlich sind, und daß a
der Winkel CDB = ABC und x = y ist.

Da nun BDC ein gleichschenkliges Dreieck ist, so ist a
auch ABC ein gleichschenkliges und AB = AC, und der W
kel ABC = ACB.

Ist ein Abschnitt gegeben und verlangt, daraus ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden, so verfahre man auf die nämliche Weise, wie eben angegeben wurde, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Ist die Kathete gegeben; so trage man sie auf den Schenkeln eines rechten Winkels an, und ziehe zu beiden die Hypotenuse, so ist die Aufgabe gelöst.

§. 217.

Aufgabe. Es ist die Summe der Hypotenuse und der Kathete gegeben. Man soll daraus ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 232. Die Summe der Hypotenuse und Kathete sey BD. Man lege an den einen Endpunkt B der Linie BD die Hälfte eines rechten Winkels mit unbestimmtem Schenkel und an den andern D den vierten Theil eines Rechten und verlängere seinen Schenkel DA, daß er den andern in dem Punkte A durchschneide. Nun mache man die Linie AC = AB, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist der Winkel $x = \frac{1}{2}R$ und das Dreieck BAC gleichschenklig, folglich seine Grundlinien-Winkel x und x' einander gleich. Hieraus bestimmt sich der dritte Dreiecks-Winkel

$$BAC = 2R - \frac{2}{2}R = R$$

also ist das Dreieck BAC rechtwinklig und wegen den Linien BA und AC gleichschenklig. Nach der Construction ist der Winkel $y = \frac{1}{4}R$, und ferner ist $x' = y + y'$

also ist $y = x' - y = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R = \frac{1}{4}R$

und demnach das Dreieck ACD gleichschenklig, weil $y = y'$ ist. Hieraus folgt, daß AC = CD und also auch

$$BC + CA = BC + CD = BD$$

ist. Das Dreieck BAC enthält also auch die gegebene Summe der Hypotenuse und der Kathete.

Zweite Auflösung. Fig. 233. Die Summe sey AE. Man bilde aus ihr, einem rechten Winkel EAB und dem Winkel $AEB = \frac{1}{4}R$, das Dreieck ABE, mache AC = AB und ziehe BC, so ist ABC das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck.

B

Aufgaben über das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck.

§. 215.

In einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke Fig. 231 schließen die beiden gleichen Seiten den rechten Winkel ein. Die beiden Winkel an der Hypotenuse sind daher einander gleich und jeder beträgt die Hälfte eines rechten Winkels. Fällt man von der Spitze des rechten Winkels eine Linie AD senkrecht auf die Hypotenuse, so ist diese die Höhe des Dreiecks, erzeugt auf der Hypotenuse zwei rechte Winkel und bildet daher zwei Dreiecke ABD und ABC, welche unter einander congruent und selbst gleichschenklig und rechtwinklig sind. Hieraus rechtfertigen sich leicht folgende Behauptungen:

1) die Höhe eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks theilt die Hypotenuse in zwei gleiche Abschnitte;
2) jeder Abschnitt ist der Höhe und der halben Hypotenuse gleich;
3) die Höhe ist die Hälfte der Hypotenuse.

Hieraus lösen sich leicht folgende Aufgaben:

§. 216.

Ist die Hypotenuse gegeben und verlangt, über ihr ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck zu bilden; so halbirt man Fig. 231. die Hypotenuse und errichte in ihrem Mittelpunkte D ihre Hälfte AD senkrecht und verbinde den Punkt A mit den Endpunkten B und C der Hypotenuse durch gerade Linien, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Ist die Höhe gegeben und verlangt, daraus ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck zu bilden, so setze man die Höhe in gerader Linie BC doppelt aneinander, errichte in ihrer Mitte D die Höhe selbst senkrecht und vollende das Dreieck ABC, so ist es das gesuchte.

Ist ein Abschnitt gegeben und verlangt, daraus ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden, so verfahre man auf die nämliche Weise, wie eben angegeben wurde, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Ist die Kathete gegeben; so trage man sie auf den Schenkeln eines rechten Winkels an, und ziehe zu beiden die Hypotenuse, so ist die Aufgabe gelöst.

§. 217.

Aufgabe. Es ist die Summe der Hypotenuse und der Kathete gegeben. Man soll daraus ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 232. Die Summe der Hypotenuse und Kathete sey BD. Man lege an den einen Endpunkt B der Linie BD die Hälfte eines rechten Winkels mit unbestimmtem Schenkel und an den andern D den vierten Theil eines Rechten und verlängere seinen Schenkel DA, daß er den andern in dem Punkte A durchschneide. Nun mache man die Linie AC = AB, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist der Winkel $x = \frac{1}{2}R$ und das Dreieck BAC gleichschenklig, folglich seine Grundlinien-Winkel x und x' einander gleich. Hieraus bestimmt sich der dritte Dreiecks-Winkel

$$BAC = 2R - \frac{2}{2}R = R$$

also ist das Dreieck BAC rechtwinklig und wegen den Linien BA und AC gleichschenklig. Nach der Construction ist der Winkel $y = \frac{1}{4}R$, und ferner ist $x' = y + y'$

also ist $y = x' - y = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R = \frac{1}{4}R$

und demnach das Dreieck ACD gleichschenklig, weil $y = y'$ ist. Hieraus folgt, daß AC = CD und also auch

$$BC + CA = BC + CD = BD$$

ist. Das Dreieck BAC enthält also auch die gegebene Summe der Hypotenuse und der Kathete.

Zweite Auflösung. Fig. 233. Die Summe sey AE. Man bilde aus ihr, einem rechten Winkel EAB und dem Winkel $AEB = \frac{1}{4}R$, das Dreieck ABE, mache AC = AB und ziehe BC, so ist ABC das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck.

sind, daß also die Winkel x und y einander gleich sind; da ferner nach der Construction $x = x'$, $y = y'$ und $AB = AC$ ist, so sind die Dreiecke ABE und ACF gleichschenklig und congruent. Dieß führt zu dem Schlusse, daß die Linien BE und AE, AF und FC einander gleich sind, und hieraus folgt:

1) daß das Dreieck EAF gleichschenklig ist und die gegebene Höhe AD enthält,
2) daß die Summe der Seiten AE + EF + AF der gegebenen Linie BC gleich ist, und daß also das Dreieck AEF den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Zweite Auflösung. Nennt man die Höhe h, die Grundlinie x, so ist jeder Schenkel $\frac{1}{2}(S - x)$ und hieraus ergibt sich nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung

$$h^2 = \frac{1}{4}(S - x)^2 - (\frac{1}{2}x)^2$$

und durch Entwicklung

$$2Sx = S^2 - 4h^2$$

Die Grundlinie bestimmt sich also durch folgende Gleichung

$$1)\quad x = \frac{S^2 - 4h^2}{2S}$$

der Schenkel durch folgende

$$2)\quad k = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}x = \frac{S + 4h^2}{4S}$$

Construction. Fig. 225. Es sey der Umfang $S = AB$, die Höhe $h = EG$. Man suche zu $S = AB$, als Hypotenuse, und der doppelten Höhe $2EG = CB$, als Kathete, die zweite Kathete AC, fälle von der Spitze des rechten Winkels C die senkrechte Linie CE auf AB und halbire den an AC liegenden Abschnitt, so ist $\frac{1}{2}AE = AD = DE$ die Grundlinie und $\frac{1}{2}DB = GH = FG$ der Schenkel. Hieraus läßt sich leicht das gesuchte gleichschenklige Dreieck FGH bilden.

§. 210.

Aufgabe. Es ist der Inhalt und die Summe der Höhe und Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden Fig. 226.

Auflösung. Der Inhalt des Dreiecks sey Q^2 und die Summe

Summe der Höhe und Grundlinie sey S. Nennt man die Grundlinie x, so ist die Höhe S — x. Da nun der Inhalt dem halben Produkte der Höhe und Grundlinie gleich ist, so gewinnt man hieraus folgende Gleichung

$$Q^2 = \tfrac{1}{2}(S - x) \cdot x = \tfrac{1}{2} Sx - \tfrac{1}{2} x^2$$

oder

$$2Q^2 = Sx - x^2$$

durch Versetzung der Zeichen und durch Zuzählen von $(\frac{1}{4}S)^2$ entsteht

$$x^2 - Sx + \tfrac{1}{4}S^2 = \tfrac{1}{4}S^2 - 2Q^2$$

und hieraus

$$x = \tfrac{1}{2}S \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}S^2 - 2Q^2}$$

Beide Zeichen, das positive und negative, erzeugen einen reellen Werth, und es können daher beide vor dem Wurzelzeichen stehen. Wird das positive Zeichen gesetzt, so wird die Grundlinie größer als die Höhe seyn, wird das negative Zeichen gesetzt, so wird sie kleiner als die Höhe seyn. Daher gibt es zwei Auflösungen der obigen Aufgabe und die Aufgabe ist unbestimmt. Sie wird bestimmt, sobald das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe angegeben ist. Es gilt also die Formel

$$x = \tfrac{1}{2}S + \sqrt{\tfrac{1}{4}S^2 - 2Q^2}$$

wenn die Grundlinie größer als die Höhe ist, und

$$x = \tfrac{1}{2}S - \sqrt{\tfrac{1}{4}S^2 - 2Q^2}$$

wenn die Grundlinie kleiner als die Höhe ist.

Construction der ersten Formel. Es sey Q = AB und die Summe der Höhe und Grundlinie S = AC. Man trage zwei unbestimmte Linien unter einem rechten Winkel aneinander und auf sie von A aus AB = Q und AD = Q und ziehe DB, trage diese Linie DB = AE von A aus auf AB und von E aus die Linie EF = $\frac{1}{2}$S = $\frac{1}{2}$AC so, daß ihr Endpunkt F in die Linie AH falle, wodurch AF entsteht, trage an diese Linie FH = $\frac{1}{2}$S = $\frac{1}{2}$AC, so ist die Linie AH die gesuchte Höhe und AC — AH = GK die gesuchte Grundlinie. Aus beiden Linien läßt sich nach §. 183. leicht das gleichschenklige Dreieck GHK bilden.

§. 211.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und die dem Schenkel zugehörige Höhe gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 227.

Auflösung. Die Grundlinie sey BC, die Höhe BE. Man beschreibe über der Grundlinie BC einen Halbkreis und trage von den beiden Endpunkten B und C aus die gegebene Höhe BE, als Sehne, in den Halbkreis, so daß BE = CF werde, und ziehe durch die Punkte B und F, C und E gerade Linien CA bis zu ihrem Durchschnitte A, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist die Linie BE = CF, beide Linien stehen senkrecht auf BA und AC und bilden also bei F und E rechte Winkel. Die Dreiecke FAC und BEA sind congruent, weil die Linie FC = BE, die Winkel bei F und E Rechte sind, und der bei A zu beiden gehört. Die Dreiecke BFC und BEC sind congruent, weil BC = BC und BE = CF und bei F und C rechte Winkel sind. Hieraus folgt die Gleichheit der Linien BA und AC. Das Dreieck ist also gleichschenklig, hat die gegebene Grundlinie und die dem Schenkel zugehörige Höhe BE.

Zweite Auflösung. Nennt man die Grundlinie G, die ihr zugehörige Höhe x. Die Höhe h, den ihr zugehörigen Schenkel y, so ist das Produkt aus der Grundlinie und der ihr zugehörigen Höhe, dem Produkte aus dem Schenkel und der ihm zugehörigen Höhe gleich, und also

$$Hy = Gx$$

also 1) $$y = \frac{Gx}{H}$$

ferner hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze zwischen der Grundlinie und ihrer Höhe und dem Schenkel folgende Gleichung 2) $$y^2 = x^2 + \tfrac{1}{4}G^2$$

Erhebt man die erste Gleichung ins Quadrat, so gewinnt man durch Vereinigung von 1 und 2 folgende dritte

$$\frac{G^2 x^2}{H^2} = x^2 + \frac{1}{4} G^2$$

oder

$$\frac{G^2 - H^2}{H^2} x^2 = \frac{1}{4} G^2$$

und hieraus bestimmt sich die der Grundlinie zugehörige Höhe

$$3) \quad x = \frac{H \cdot G}{2\sqrt{(G^2 - H^2)}}$$

der Schenkel

$$4) \quad k = \frac{G x}{H} = \frac{G^2}{2\sqrt{(G^2 - H^2)}}$$

§. 212.

Aufgabe. Es ist der Schenkel und die ihm zugehörige Höhe gegeben. Man soll daraus ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 228.

Erste Auflösung. Der Schenkel sey AC, seine Höhe BE. Man beschreibe über AC einen Halbkreis AFC, trage von dem einen Endpunkte C die Höhe BE = CF, als Sehne, in den Halbkreis und ziehe durch A und F eine gerade Linie und mache AB = AC und ziehe BC, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Die Linie AB = AC, also ist ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit dem gegebenen Schenkel. Die Linie CF steht senkrecht auf AB und CF = BE, also hat das Dreieck auch die gegebene Höhe. Die den beiden Schenkeln zugehörigen Höhen sind einander gleich, also erfüllt das Dreieck ABC die gegebenen Bedingungen.

Zweite Auflösung. Nennt man den Schenkel k, seine Höhe h, die Grundlinie x, ihre Höhe y, so hat man folgende Gleichung

$$h \cdot k = x \cdot y, \text{ also } y = \frac{h k}{x}$$

nach dem pythagoräischen Lehrsatze aber folgende

$$k^2 - \frac{1}{4} x^2 = y^2$$

Erhebt man die erste Gleichung in das Quadrat, so gewi
man durch Vereinigung

$$\frac{h^2\,k^2}{x^2} = k^2 - \tfrac{1}{4}x^2$$

Aus dieser Gleichung leitet sich folgende Bestimmung für
Grundlinie ab 1) $x = \sqrt{2k^2 - 2k\sqrt{(k^2 - h^2)}}$
für ihre Höhe

$$2)\quad y = \frac{hk}{x} = \frac{hk}{\sqrt{[2k^2 - 2k\sqrt{(k^2 - h^2)}]}}$$

§. 213.

Aufgabe. Es ist der Schenkel gegeben. Man
über ihm ein gleichschenkliges Dreieck bilden, wo
der Winkel an der Grundlinie doppelt so gro
als der Scheitelwinkel ist. Fig. 229.

Auflösung. Der Schenkel sey AC. Man theile den
ben durch den Punkt D in das innere und äussere Verhälti
so, daß CD : DA = DA : AC sich verhält, und beschre
über CD mit DA ein gleichschenkliges Dreieck CBD und zi
BA, so ist ABC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist BC = BD = A
Hieraus fließen folgende Proportionen

$$CD : AD = AD : CA$$

oder

$$CD : BC = CB : CA$$

Die beiden Dreiecke BCD und ACB haben den Winkel bei
gemeinschaftlich, dieser Winkel wird von den Linien CD
CB, CB und CA umschlossen, welche zu einander in gleich
Verhältnisse stehen. Dieß führt zu dem Schlusse, daß
Dreiecke BCD und ABC einander ähnlich sind, und daß
der Winkel CDB = ABC und x = y ist.

Da nun BDC ein gleichschenkliges Dreieck ist, so ist
auch ABC ein gleichschenkliges und AB = AC, und der W
kel ABC = ACB.

Das Dreieck ABD ist gleichschenklig, also $x = x'$, folglich ist $x + x = x + y$, oder der Winkel

$$ABC = 2x$$

Das Dreieck ABC erfüllt also die gegebenen Bedingungen.

§. 214.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie gegeben. Man soll über ihr ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Winkel an der Grundlinie doppelt so groß, als der Scheitelwinkel ist. Fig. 230.

Auflösung. Die Grundlinie sey BC. Man bilde mit einem willkührlich gewählten Schenkel CA′ nach dem vorigen §. ein gleichschenkliges Dreieck B′A′C und trage auf die Grundlinie B′ die gegebene Grundlinie CB und ziehe mit B′A′ durch B die Linie BA parallel, so ist BAC das gesuchte gleichschenklige Dreieck.

B

Aufgaben über das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck.

§. 215.

In einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke Fig. schließen die beiden gleichen Seiten den rechten Winkel Die beiden Winkel an der Hypotenuse sind daher einc gleich und jeder beträgt die Hälfte eines rechten Winkels. man von der Spitze des rechten Winkels eine Linie AD recht auf die Hypotenuse, so ist diese die Höhe des Dre erzeugt auf der Hypotenuse zwei rechte Winkel und bilde her zwei Dreiecke ABD und ABC, welche unter einande gruent und selbst gleichschenklig und rechtwinklig sind. Hi rechtfertigen sich leicht folgende Behauptungen:

1) die Höhe eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dr theilt die Hypotenuse in zwei gleiche Abschnitte;
2) jeder Abschnitt ist der Höhe und der halben Hy nuse gleich;
3) die Höhe ist die Hälfte der Hypotenuse.

Hieraus lösen sich leicht folgende Aufgaben:

§. 216.

Ist die Hypotenuse gegeben und verlangt, über ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck zu bilden; so ha man Fig. 231. die Hypotenuse und errichte in ihrem M punkte D ihre Hälfte AD senkrecht und verbinde den Punl mit den Endpunkten B und C der Hypotenuse durch g Linien, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Ist die Höhe gegeben und verlangt, daraus ein gl schenklig-rechtwinkliges Dreieck zu bilden, so setze man Höhe in gerader Linie BC doppelt aneinander, errichte ir der Mitte D die Höhe selbst senkrecht und vollende das Dr ABC, so ist es das gesuchte.

Ist ein Abschnitt gegeben und verlangt, daraus ein gleichschenkliges Dreieck zu bilden, so verfahre man auf die nämliche Weise, wie eben angegeben wurde, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Ist die Kathete gegeben; so trage man sie auf den Schenkeln eines rechten Winkels an, und ziehe zu beiden die Hypotenuse, so ist die Aufgabe gelöst.

§. 217.

Aufgabe. Es ist die Summe der Hypotenuse und der Kathete gegeben. Man soll daraus ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 232. Die Summe der Hypotenuse und Kathete sey BD. Man lege an den einen Endpunkt B der Linie BD die Hälfte eines rechten Winkels mit unbestimmtem Schenkel und an den andern D den vierten Theil eines Rechten und verlängere seinen Schenkel DA, daß er den andern in dem Punkte A durchschneide. Nun mache man die Linie AC = AB, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction ist der Winkel $x = \frac{1}{2}R$ und das Dreieck BAC gleichschenklig, folglich seine Grundlinien-Winkel x und x′ einander gleich. Hieraus bestimmt sich der dritte Dreiecks-Winkel

$$BAC = 2R - \frac{2}{2}R = R$$

also ist das Dreieck BAC rechtwinklig und wegen den Linien BA und AC gleichschenklig. Nach der Construction ist der Winkel $y = \frac{1}{4}R$, und ferner ist $x' = y + y'$

also ist $y = x' - y = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R = \frac{1}{4}R$

und demnach das Dreieck ACD gleichschenklig, weil $y = y'$ ist. Hieraus folgt, daß AC = CD und also auch

$$BC + CA = BC + CD = BD$$

ist. Das Dreieck BAC enthält also auch die gegebene Summe der Hypotenuse und der Kathete.

Zweite Auflösung. Fig. 233. Die Summe sey AE. Man bilde aus ihr, einem rechten Winkel EAB und dem Winkel $AEB = \frac{1}{4}R$, das Dreieck ABE, mache AC = AB und ziehe BC, so ist ABC das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Es ist der Winkel BAC = R und x = z = ½ R, ferner ist der Winkel x' = y + y'. Demnach ist

$$y' = x' - y = \tfrac{1}{2} R - \tfrac{1}{4} R = \tfrac{1}{4} R.$$

Also ist y' = y = ¼ R und BCE ein gleichschenkliges Dreieck, hieraus fließt, daß AC + BC = AC + CE = AE ist, und daß das Dreieck ABC die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Dritte Auflösung. Nennt man die Summe der Hypotenuse und Kathete S, die Kathete x, so ist die Hypotenuse S — x, und hieraus gewinnt man folgende Gleichung

$$(S - x)^2 = 2x^2$$

oder

$$S^2 = x^2 + 2Sx$$

Demnach ist die gesuchte Kathete

1) $x = \sqrt{S^2 + S^2} - S = \sqrt{2S^2} - S$

die Hypotenuse

2) $H = S - x = 2S - \sqrt{2S^2} = S(2 - \sqrt{2}$

§. 218.

Aufgabe. Es ist die Summe des Quadrates der Hypotenuse und der einen Kathete gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 234.

Erste Auflösung. Die Seite des Summenquadrates sey EC. Man theile diese in drei Theile, beschreibe über ihr einen Kreisbogen EBC und errichte auf dem Endpunkte ihres dritten Theils D eine senkrechte Linie DB bis zum Durchschnitte B des Kreisbogens, bilde über der Linie BC, als Hypotenuse, und mit EB, als Kathete, das gleichschenklige Dreieck BAC, so ist dieses das gesuchte rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Da nach der Construction CD = ⅔ FC und ED = ⅓ EC ist, so verhalten sich diese zwei Linien zu einander, wie 1 : 2. Da sich nun die Abschnitte eines rechtwinkligen Dreiecks zu einander verhalten, wie die Quadrate der anliegenden Katheten, so ist $BC^2 : EB^2 = 2 : 1$ oder, wenn man aus den Gliedern dieser Proportion die Quadratwurzeln zieht $BC : EB = \sqrt{2} : 1$

folglich ist

$$BC = EB \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2EB^2} = \sqrt{EB^2 + EB^2}$$

d. h. wenn man aus EB als Kathete ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bildet, so wird BC die ihr zugehörige Kathete seyn. Macht man also BA = AC = EB, so ist BAC das gesuchte rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck, das die Anforderungen der Aufgabe erfüllt.

Zweite Auflösung. Nennt man das Summenquadrat S^2, die Kathete x, so ist das Quadrat der Hypotenuse $S^2 - x^2$ und hieraus hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung $S^2 - x^2 = 2x^2$

und hieraus für die Kathete folgende Bestimmung

$$k = \sqrt{\tfrac{1}{3}S^2} = \sqrt{\tfrac{1}{9}(4S^2 - S^2)} = \tfrac{1}{3}\sqrt{4S^2 - S^2}$$

für die Hypotenuse

$$H = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}S^2}$$

Anmerkung. Aus der Gleichung zwischen der Kathete und dem Summenquadrate

$$k^2 = x^2 = \tfrac{1}{3}S^2$$

leitet sich folgende Proportion ab

$$\tfrac{1}{3}S : k = k : S$$

und hieraus folgender Satz: die Kathete eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Summenquadratseite der Hypotenuse und Kathete und dem dritten Theile dieser Linie.

§. 219.

Aufgabe. Es ist der Ueberschuß der Hypotenuse über die Kathete gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 235.

Erste Auflösung. Der Unterschied sey DA. Man errichte an dem einen Endpunkte A eine senkrechte unbestimmte Linie A, und an dem andern E lege man den Winkel $ADB = \frac{3}{4}R$ und verlängere seinen Schenkel bis zum Durchschnitte B der senkrechten AB, verlängere DA und mache AC = AB, ziehe BC so ist BAC das gesuchte rechtwinklige gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Da der Winkel DAB = R, ADB = $\frac{3}{4}$R, so ist DBA = $\frac{1}{4}$R. Da in dem Dreiecke BAC der Winkel bei A ein Rechter, und die Linie BA = AC ist, so ist x = x' = $\frac{1}{2}$R und folglich der Winkel

$$DBC = DBA + x' = \frac{3}{4}R.$$

Demnach ist der Winkel BDC = DBC = $\frac{3}{4}$R und also auch das Dreieck DBC gleichschenklig und DC = BC.

Da nun DA = DC — AC, so ist auch

DA = BC — AC.

Das Dreieck BAC ist also gleichschenklig-rechtwinklig und hat eine Hypotenuse, welche um den gegebenen Unterschied größer, als die Kathete ist.

Zweite Auflösung. Fig. 236. Man bilde aus dem Unterschiede AD, als Kathete, das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck ADE, verlängere die Hypotenuse AE um den Unterschied AD = EC. Errichte in dem Endpunkte C eine senkrechte Linie auf AC und verlängere AD bis zum Durchschnitte B mit dieser senkrechten Linie, so ist ABC das gesuchte rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Da das Dreieck ADE rechtwinklig und gleichschenklig ist, so ist der Winkel v = v' = $\frac{1}{2}$R, da ferner EC = AD = ED ist, so ist auch das Dreieck ECD gleichschenklig und die Winkel x und x' einander gleich. Geht man von dem Winkel v' auf die im Dreiecke ECD entgegengesetzten über so ist der Winkel v' = x + x' = 2x

also, da v' = $\frac{1}{2}$R ist, x = $\frac{1}{2}$v' = $\frac{1}{4}$R

Geht man von dem Winkel ACB = R auf den Winkel z' über, so ist z' = ACB — x' = R — $\frac{1}{4}$R = $\frac{3}{4}$R.

Der Winkel ADC = ADE + x = R + $\frac{1}{4}$R = $\frac{5}{4}$R, also ist der Winkel CDB = z = 2R — $\frac{5}{4}$R = $\frac{3}{4}$R

und demnach sind die beiden Winkel z und z' einander gleich, also das Dreieck CDB gleichschenklig, die Linie CB = DB und der Winkel v'' = $\frac{1}{2}$R.

Hieraus folgt, daß AD = AB — DB = AB — CB

und v = v'' = $\frac{1}{2}$R, daß also das Dreieck ACB gleichschenklig und rechtwinklig ist und den gegebenen Unterschied zwischen Hypotenuse und Kathete hat.

Dritte Auflösung. Fig. 237. Der Unterschied sey BD. Man bilde aus dem Unterschiede BD den Winkel ABD $= \frac{1}{2}R$, dem Winkel BDA $= \frac{1}{4}R$, als anliegenden Winkeln, das Dreieck ABD, verlängere BD und mache AC = AB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Es ist der Winkel $x' = x = \frac{1}{2}R$, also BAC = R. Der Winkel $z' = 2R - \frac{1}{4}R = \frac{3}{4}R$. Demnach ist der Winkel $z = 2R - z' - x' = \frac{3}{4}R$ und CDA ein gleichschenkliges Dreieck, also ist BD = BC — DC = BC — AC. Das Dreieck erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Vierte Auflösung. Nennt man den Unterschied d, die Kathete x, so ist die Hypotenuse x + d und hieraus hat man folgende Gleichung nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$2x^2 = (x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$$

also $x^2 - 2dx = d^2$

Wird d^2 auf beiden Seiten zugezählt, so entsteht

$$(x - d) = 2d^2$$

Hieraus bestimmt sich die Kathete durch folgende Gleichung

1) $k = x = d + \sqrt{2d^2} = d + d\sqrt{2} = d(1 + \sqrt{2})$

und die Hypotenuse durch folgende

2) $H = x + d = 2d + \sqrt{2d^2} = d(2 + \sqrt{2})$

§. 220.

Aufgabe. Es ist die Summe der Hypotenuse und Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 238.

Auflösung. Die Summe der Hypotenuse und Höhe sey AE. Man theile die gegebene Linie in drei gleiche Theile und bemerke die Theilungspunkte B und D, errichte auf dem Punkte B den dritten Theil der Linie AE senkrecht und verbinde den Endpunkt C dieser senkrechten BC mit den beiden Punkten A und D durch gerade Linien, so ist das hiedurch entstandene Dreieck ACD das verlangte.

Der Beweis führt sich leicht durch die Bemerkung, daß die Höhe die Hälfte der Hypotenuse, also auch der dritte Theil von der Summe der Hypotenuse und Höhe ist.

§. 221.

Aufgabe. Es ist die Summe der Quadrate der Hypotenuse und Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck construiren. Fig. 239.

Erste Auflösung. Die Linie des Quadrates der Hypotenuse und Höhe sey GH. Man theile die Linie GH des gegebenen Summenquadrates in 5 gleiche Theile und halbire sie und beschreibe über ihr einen Halbkreis. Errichte an dem Endpunkte D des fünften Theils der Linie GH eine senkrechte Linie, so daß sie die Kreislinie in dem Punkte C durchschneidet, ziehe von diesem Punkte C auf die Endpunkte der Linie GH die Linien CG und CH, so ist GC die Höhe und CH die Hypotenuse des zu suchenden Dreiecks, woraus sich so fort nach §. 216. das verlangte Dreieck CBH leicht bilden läßt.

Beweis. Vermöge der Construction ist über der Linie GH ein rechtwinkliges Dreieck GCH gebildet worden und also die Summe der Quadrate der beiden Katheten dem Quadrate der Hypotenuse gleich. Die Linie GH ist in 5 gleiche Theile eingetheilt und die Linie CD steht auf der Linie GH senkrecht auf, daß sich die beiden Abschnitte GD und DH, wie $1 : 4$, verhalten. Da sich nun die Quadrate der beiden Katheten, wie die ihnen anliegende Abschnitte der Hypotenuse verhalten, so ergibt sich folgende Proportion

$$GC^2 : CH^2 = 1 : 4$$

oder, wenn die Quadratwurzel aus drei Glieder dieser Proportion gezogen wird, $GC : CH = 1 : 2$.

Demnach ist die Linie CH doppelt so groß, als die Linie GC. Da nun in einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecke die auf der Hypotenuse aufstehende Höhe die Hälfte der Hypotenuse ist, so läßt sich über der Linie CH ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck CHB bilden, dessen Hypotenuse und Höhe zwei Quadrate erzeugen, deren Summe dem Quadrat der gegebenen Linie GH gleich ist.

Zweite Auflösung. Nennt man die Summe des Quadrates der Hypotenuse und Höhe S^2, die Höhe x, so ist

das Quadrat der Hypotenuse $S^2 - x^2$; die Höhe ist aber die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse, hier also zwischen ihren beiden Hälften, also ist $x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - x^2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - x^2}$

$= \frac{1}{4}S^2 - \frac{1}{4}x^2$

und hieraus ergibt sich für die Kathete folgende Gleichung

1) $x = \sqrt{\frac{1}{4}S^2}$

für die Hypotenuse

2) $H = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{\frac{3}{4}S^2}$

§. 222.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen den Quadraten der Hypotenuse und der Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 240.

Erste Auflösung. Die Seite des Unterschiedsquadrates sey BE. Man suche ihren dritten Theil EF und setze ihn in gerader Richtung an EF an, errichte in dem Endpunkte E eine senkrechte Linie und beschreibe über BF einen Halbkreis BCF, der die senkrechte Linie EC in einem Punkte C durchschneiden wird, ziehe BC, so ist BC die Hypotenuse und EC die Höhe. Halbirt man BC und errichtet in ihrem Mittelpunkte G die Linie GA = BG senkrecht und zieht AB und BC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Da die Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks der doppelten Höhe gleich ist, so ist das Quadrat der Hypotenuse das Vierfache von dem der Höhe und der Unterschied beider ist das Dreifache von dem der Höhe. Ist das dreifache Quadrat der Höhe gegeben und will man von diesem zu dem Quadrat der Hypotenuse übergehen, so muß der dritte Theil dieses Quadrates noch zugezählt werden. Da nun EF $= \frac{1}{3}$BE, so ist die Linie EC, als die mittlere geometrische Proportionale, $EC^2 = \frac{1}{3}BE \cdot BE = \frac{1}{3}BE^2$

BE^2 ist aber das dreifache Quadrat der Höhe. Werden nun beide vereinigt, so ist $BC^2 = BE^2 + EC^2$

oder $BC = \sqrt{BE^2 + \frac{1}{3}BE^2}$

Also ist BC die gesuchte Hypotenuse und BAC das gesuchte rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck.

Zweite Auflösung. Nennt man den Unterschied der Quadrate d^2, die Höhe x, so ist das Quadrat der Hypotenuse $H^2 = x^2 + d^2$
es ist aber $H = 2x$, also fließt hieraus die Gleichung
$$3x^2 = d^2$$
und hieraus gewinnt man für die Höhe folgende Gleichung
$$1)\quad x = \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = \frac{d}{\sqrt{3}}$$
für die Hypotenuse aber
$$2)\quad H = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{3}d^2} = \sqrt{\tfrac{4}{3}d^2} = 2d\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

§. 223.

Aufgabe. Es ist die Summe der Kathete und Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 241. Die Summenlinie sey DE. Man errichte an dem einen Endpunkte D eine durchschneidende senkrechte Linie, und an dem andern trage man den Winkel $DEC = \frac{1}{4}R$ an, dessen Schenkel EC die Linie DC in dem Punkte C schneiden wird, nun mache man $AD = BD = DC$, ziehe AB und AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke ABD und ADC congruent, rechtwinklig und gleichschenklig, folglich ist $y = y' = x = x' = \frac{1}{2}R$ und also der Winkel $BAC = R$ und $AB = AC$. Das Dreieck ABC ist also gleichschenklig und rechtwinklig.
Da der Winkel $x' = z + z'$, so ist $z' = x' - z = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R = \frac{1}{4}R$, also ist auch $z = z' = \frac{1}{4}R$ und das Dreieck AEC gleichschenklig und $AE = AC$, folglich auch
$$AD + AC = AD + AE = DE$$
Das Dreieck ABC erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Fig. 242. Die Summenlinie sey BE. Man bilde aus ihr, der Hälfte eines rechten Winkels $EBC = \frac{1}{4}R$, dem vierten Theile eines solchen $BED = \frac{1}{4}R$

das Dreieck BED, mache DC = AD = BD, so ist ABC das gesuchte rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck.

Der Beweis führt sich auf eine ähnliche Art, wie bei der vorigen Auflösung.

Dritte Auflösung. Die Summe der Kathete und Hypotenuse sey S. Nennt man die Höhe x, so ist die Hypotenuse 2x und die Kathete sey S — x. Hieraus gewinnt man nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$4x^2 = 2(S-x)^2 = 2S^2 - 4Sx + 2x^2$$

Wird durch 2 gemessen und dann S^2 auf beiden Seiten zugezählt, so entsteht $(x+S)^2 = 2S^2$

und hieraus bestimmt sich die Höhe durch folgende Gleichung

1) $h = x = \sqrt{2S^2} - S = S(\sqrt{2} - 1)$

die Hypotenuse durch folgende

2) $H = 2x = 2\sqrt{2S^2} - 2S = 2S(\sqrt{2} - 1)$

die Kathete durch folgende

3) $k = S - x = 2S - \sqrt{2S^2} = S(2 - \sqrt{2})$

§. 224.

Aufgabe. Es ist die Summe der Quadrate der einen Kathete und der Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 240.

Erste Auflösung. Die Seite des Summenquadrates sey BE. Man theile die Linie BE in drei Theile, verlängere sie um ihren dritten Theil EF = $\frac{1}{3}$BE, beschreibe über BF einen Halbkreis BCF und errichte auf dem Punkte E eine senkrechte Linie bis zum Durchschnitte C des Halbkreises, ziehe die Linie BC, so ist BC die Hypotenuse und EC die Höhe. Aus beiden läßt sich leicht das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck BAC bilden, welches das gesuchte ist.

Beweis. Da das Kathetenquadrat doppelt so groß, als das Quadrat der Höhe ist, so ist das Summenquadrat beider BE^2 dreimal so groß, als das der Höhe. Geht man nun von dem Höhenquadrat zu dem Hypotenusenquadrat über, so ist

dieſes das Vierfache von dem Höhenquadrat. Zählt man nun zu dem Summenquadrat der Höhe und Kathete, den dritten Theil beider, ſo entſteht durch dieſe Summe das Hypotenuſenquadrat, alſo auch die Hypotenuſe. Die Linie EF iſt $= \frac{1}{3}BE$, alſo iſt $EC^2 = BE \cdot EF = \frac{1}{3}BE \cdot BE = \frac{1}{3}BE^2$ und hieraus gewinnt man $BC^2 = BE^2 + \frac{1}{3}BE^2$

alſo auch $BC = \sqrt{BE^2 + \frac{1}{3}BE^2}$

und BC iſt die geſuchte Hypotenuſe.

Zweite Auflöſung. Das Summenquadrat ſey S^2, die Höhe x, ſo iſt das Quadrat der Kathete $k^2 = S^2 - x^2$, die Hypotenuſe aber $2x$. Hieraus zieht man nach dem pythagoräiſchen Lehrſatze $(2x)^2 = 2(S^2 - x^2)$

oder $3x^2 = S^2$

und hieraus beſtimmt ſich die Höhe durch folgende Gleichung

1) $h = x = \sqrt{\frac{1}{3}S^2} = \frac{S}{\sqrt{3}}$

die Kathete durch folgende

2) $K = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{S^2 - \frac{1}{3}S^2} = \sqrt{\frac{2}{3}S^2}$

die Hypotenuſe durch folgende

3) $H = 2x = 2\sqrt{\frac{1}{3}S^2} = 2S\sqrt{\frac{1}{3}} = S\sqrt{\frac{4}{3}}$

§. 225.

Aufgabe. Es iſt der Unterſchied zwiſchen der Höhe und der Kathete gegeben. Man ſoll daraus ein rechtwinklig-gleichſchenkliges Dreieck bilden. Fig. 243.

Erſte Auflöſung. Der Unterſchied ſey DE. Man bilde aus DE, einem rechten Winkel EDC und dem Winkel $DEC = \frac{3}{4}R$ das rechtwinklige Dreieck DEC, verlängere die beiden Katheten, halbire die Linie EC und errichte in ihrem Mittelpunkte F die Linie FA ſenkrecht bis zum Durchſchnitte A mit dem verlängerten Unterſchiede, ziehe AC und mache $AB = AC$, ſo iſt ABC das geſuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Conſtruction ſind die beiden Dreiecke EAF und FAC congruent, alſo $AC = AE$ und demnach $ED = AC - AE = AC - AD$. Da AD ſenkrecht auf BC ſteht, ſo iſt ED der Unterſchied zwiſchen Höhe und Schenkel

des

des Dreiecks BAC. Der Winkel AEC = ACE = $\frac{3}{4}$R; also ist der Winkel EAC = 2R − 2.$\frac{3}{4}$R = $\frac{1}{2}$R, also auch der Winkel bei C = $\frac{1}{2}$R, und demnach auch der Winkel bei B. Da nun ABC ein gleichschenkliges Dreieck ist, so ist auch der Winkel ABC = BCA = $\frac{1}{2}$R und endlich der Winkel BAC = 2R − $\frac{2}{2}$R = R, also ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

Zweite Auflösung. Fig. 244. Der Unterschied sey CE. Man bilde aus der Linie CE, dem Winkel ECD = $\frac{1}{2}$R und dem Winkel CED = $\frac{1}{4}$R das Dreieck DEC, verlängere CD und CE unbestimmt; halbire die Linie DE und errichte auf ihrem Mittelpunkte F die Linie FA senkrecht bis zum Durchschnitte A mit der verlängerten Unterschiedslinie, mache AB = AC, so ist ABC das gesuchte rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck.

Beweis. Man fälle von A auf BC die Linie AD senkrecht. Nach der Construction ist der Winkel ABC = ACB = $\frac{1}{2}$R, also ist das Dreieck BAC gleichschenklig und rechtwinklig. Da der Winkel ACD = $\frac{1}{2}$R ist, so ist wegen der senkrechten Linie AD der Winkel DAC = $\frac{1}{2}$R. Nun ist der Winkel DEC = $\frac{1}{4}$R, also ist x = 2R − $\frac{1}{4}$R = $\frac{3}{4}$R und also der dritte Winkel im Dreieck ADE = x′ = 2R − x − $\frac{1}{2}$R = $\frac{3}{4}$R. Die Winkel x und x′ sind also einander gleich; daher ist das Dreieck ADE gleichschenklig und folglich AD = AE. Hieraus folgt, daß

$$EC = AC - AE = AC - AD$$

ist, und daß also in dem Dreiecke ABC die Kathete um CE größer ist, als die Höhe.

Dritte Auflösung. Der gegebene Unterschied sey d. Nennt man die Kathete x, so ist die Höhe x − d und hieraus ergibt sich, da die Hypotenuse der doppelten Höhe gleich ist, zwischen Hypotenuse und Kathete folgende Gleichung

$$[2(x - d)]^2 = 2x^2$$

oder

$$4x^2 - 8dx + 4d^2 = 2x^2$$

und hieraus durch gehörige Reduction

$$x^2 - 4dx = -2d^2$$

Wird $4d^2$ auf beiden Seiten zugezählt, so entsteht

$$(x - 2d) = 2d^2$$

und hieraus bestimmt sich die Kathete

$$x = 2d \pm \sqrt{2d^2}$$

Da die Kathete eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks aber immer größer ist, als der doppelte Unterschied zwischen ihr und der Hypotenuse; so muß das Wurzelzeichen mit dem positiven Zeichen versehen seyn, und es ist $x = 2d + \sqrt{2d^2}$

die Gleichung für die Höhe ist

$$h = x - d = d + \sqrt{2d^2}$$

die Gleichung für die Hypotenuse ist

$$H = 2h = 2d + 2\sqrt{2d^2}$$

§. 226.

Aufgabe. Es ist der Umfang gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 245.

Erste Auflösung. Die Umfangslinie sey GE. Man trage an ihre beiden Endpunkte G und E die Winkel AEG = AGE = $\frac{1}{4}$R und verlängere ihre Schenkel bis zu ihrem Durchschnittspunkte A, halbire die Linie GA und AE durch die Senkrechten MB und NC bis zu ihren Durchschnitten B und C mit der Umfangslinie, ziehe die Linien AB und AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction sind die beiden Dreieck AGB und ACE congruent, also ist die Linie AC = CE und der Winkel $x = x' = \frac{1}{4}$R. Geht man von diesen Winkel auf den Winkel z im Dreieck ABC über, so ist $z = x + x' = \frac{1}{2}$R.

Auf gleiche Weise zeigt sich, daß das Dreieck GBA gleichschenklig ist, und daß also BG = BA und $z' = y + y = \frac{1}{2}$R ist. Dieß führt zu dem Schlusse, daß der Winkel BAC = R ist und daß

$$AB + BC + AC = GB + BC = GE$$

ist, und daß also das Dreieck die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Anmerkung. Eine andere Auflösung gewinnt man, wenn man im Mittelpunkte D der Umfangslinie GE eine senkrechte Linie errichtet und an einem Endpunkte E den Winkel $AED = \frac{1}{4}R$ legt und seinen Schenkel bis zum Durchschnitte mit A verlängert, AE durch eine Senkrechte durchschneidet, AC zieht und dann $AB = AC$ macht.

Zweite Auflösung. Nennt man den Umfang U, die Kathete x, so ist die Hypotenuse $U - 2x$ und hieraus zieht man folgende Gleichung

$$2x^2 = (U - 2x)^2 = U^2 - 4Ux + 4x^2$$

also $x^2 - 2Ux = -\frac{1}{2}U^2$

Dieß führt zu folgender Bestimmung

$$k = U \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}U^2}$$

Man erkennt leicht, daß das negative Zeichen vor dem Wurzelzeichen stehen müsse. Die Kathete bestimmt sich also durch folgende Gleichung $K = U - \sqrt{\frac{1}{2}U^2}$

die Hypotenuse durch folgende

$$H = U - 2x = U - 2(U - \sqrt{\tfrac{1}{2}U^2}) = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}U^2} - U$$

§. 227.

Aufgabe. Es ist die Summe der Quadrate der, ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck einschließenden drei Seiten gegeben. Man soll daraus das Dreieck selbst bestimmen. Fig. 246.

Auflösung. Berücksichtigt man, daß das Quadrat der Hypotenuse zweimal so groß, als das der Kathete sey und daß also die Quadrate der drei Linien zusammen genommen, viermal so groß, als das einer Kathete sey, so ist also die Kathete die Hälfte der Quadratseite von allen drei Linien. Diese Bemerkung führt zu folgender Construction:

Die Quadratseite sey BE. Man halbire diese Linie und bilde mit ihrer Hälfte $BC = CA = \frac{1}{2}BE$, als Kathete ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

§. 228.

Aufgabe. Es ist der Inhalt eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks gegeben. Man soll daraus das Dreieck bilden. Fig. 247.

Auflösung. Die Linie des als Quadrat dargestellten Inhaltes Q^2 sey AB. Man setze die Linie AB doppelt aneinander, wodurch die Linie ABC entstehet, errichte in dem Mittelpunkte B der Linie AC die Linie BD = AB senkrecht und vollende das Dreieck ADB, so ist dieses Dreieck das gesuchte.

Beweis. Nennt man die eine Kathete x, so läßt sich der Inhalt des rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks darstellen durch das Produkt der einen Kathete in ihre Hälfte und es ist

$$\tfrac{1}{2}x^2 = Q^2 = AB^2$$

Diese Gleichung führt zu folgender

$$x = \sqrt{2\,Q^2} = \sqrt{2\,AB^2}$$

und demnach werden die Katheten AD und DB gefunden, wenn die Linie AB verdoppelt und in ihrem Mittelpunkt B die Linie BD = AB senkrecht errichtet wird, woraus so fort das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck ABD entsteht, wozu die Linie AB die Hypotenuse ist.

Anmerkung. Da das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck durch den Inhalt bestimmt ist, so sind ausser dieser einzigen Aufgabe keine andere möglich, worin der Inhalt mit als Bedingung der Aufgabe vorkömmt, denn jede andere Bestimmung, die noch weiter in der Aufgabe angegeben ist, ist überflüssig.

folglich ist

$$BC = EB \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2EB^2} = \sqrt{EB^2 + EB^2}$$

d. h. wenn man aus EB als Kathete ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bildet, so wird BC die ihr zugehörige Kathete seyn. Macht man also BA = AC = EB, so ist BAC das gesuchte rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck, das die Anforderungen der Aufgabe erfüllt.

Zweite Auflösung. Nennt man das Summenquadrat S^2, die Kathete x, so ist das Quadrat der Hypotenuse $S^2 - x^2$ und hieraus hat man nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung $S^2 - x^2 = 2x^2$
und hieraus für die Kathete folgende Bestimmung

$$k = \sqrt{\tfrac{1}{3}S^2} = \sqrt{\tfrac{1}{9}(4S^2 - S^2)} = \tfrac{1}{3}\sqrt{4S^2 - S^2}$$

für die Hypotenuse

$$H = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}S^2}$$

Anmerkung. Aus der Gleichung zwischen der Kathete und dem Summenquadrate

$$k^2 = x^2 = \tfrac{1}{3}S^2$$

leitet sich folgende Proportion ab

$$\tfrac{1}{3}S : k = k : S$$

und hieraus folgender Satz: die Kathete eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Summenquadratseite der Hypotenuse und Kathete und dem dritten Theile dieser Linie.

§. 219.

Aufgabe. Es ist der Ueberschuß der Hypotenuse über die Kathete gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 235.

Erste Auflösung. Der Unterschied sey DA. Man errichte an dem einen Endpunkte A eine senkrechte unbestimmte Linie A, und an dem andern E lege man den Winkel $ADB = \frac{3}{4}R$ und verlängere seinen Schenkel bis zum Durchschnitte B der senkrechten AB, verlängere DA und mache AC = AB, ziehe BC so ist BAC das gesuchte rechtwinklige gleichschenklige Dreieck.

DC die Linie DE senkrecht und trage an dem Endpunkte D den sechsten Theil eines rechten Winkels DEC §. 48. a und verlängere seinen Schenkel EC bis er die Linie BC in C durchschneidet, halbire die Linie EC durch eine Senkrechte FA, ziehe AC, mache BC = AC und ziehe AB, so ist ABC das gesuchte gleichseitige Dreieck.

Beweis. Die Congruenz der Dreiecke EAF und AFC führt zu der Gleichheit der Linien AE und AC, und der Winkel x und x'. Es ist also AD + AC = DE und das Dreieck enthält die gegebene Summe der Höhe und Seite.

Ferner ist der Winkel $u = x + x' = 2 . \frac{1}{6} R = \frac{1}{3} R$
also der Winkel $BCA = 2R - R - \frac{1}{3} R = \frac{2}{3} R$.
Da nun die Linie BC = AC, so ist der Winkel CBA = BAC und jeder $\frac{2}{3} R$ und also das Dreieck BAC gleichseitig.

Zweite Auflösung. Nennt man die Summe der Seite und Höhe S, die Seite x, so ist die Höhe S — x, und hieraus fließt nach dem pythagoräischen Lehrsatze folgende Gleichung $\frac{1}{4} x^2 + (S - x)^2 = x^2$
Ihre Entwicklung führt zu folgender

$$x^2 - 8Sx = -4S^2$$

Zählt man $(4S)^2$ zu, so bestimmt sich die Seite durch folgende Gleichung 1) $x = 4S - \sqrt{4(4S^2 - S^2)} = 4S - 2\sqrt{3S^2}$
die Höhe durch folgende

2) $h = S - x = 2\sqrt{3S^2} - 3S$

Diese Gleichungen geben sehr einfache Constructionen.

§. 231.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen der Seite und Höhe gegeben. Man soll daraus ein gleichseitiges Dreieck bilden. Fig. 250.

Erste Auflösung. Der Unterschied sey ED. Man trage an den einen Endpunkt D einen rechten Winkel und an den andern den Winkel $x = \frac{5}{6} R = 75°$ und verlängere die beiden Schenkel dieser Winkel bis sie sich in dem Punkte C durchschneiden. Nun verlängere man die Linie DE von E nach D und halbire die Linie EC durch eine Senkrechte AF, daß sie

Dritte Auflösung. Fig. 237. Der Unterschied sey BD. Man bilde aus dem Unterschiede BD den Winkel ABD $= \frac{1}{4}R$, dem Winkel BDA $= \frac{1}{4}R$, als anliegenden Winkeln, das Dreieck ABD, verlängere BD und mache AC = AB, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Es ist der Winkel $x' = x = \frac{1}{4}R$, also BAC = R. Der Winkel $z' = 2R - \frac{1}{4}R = \frac{7}{4}R$. Demnach ist der Winkel $z = 2R - z' - x' = \frac{1}{2}R$ und CDA ein gleichschenkliges Dreieck, also ist BD = BC — DC = BC — AC. Das Dreieck erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Vierte Auflösung. Nennt man den Unterschied d, die Kathete x, so ist die Hypotenuse x + d und hieraus hat man folgende Gleichung nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$2x^2 = (x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$$

also $x^2 - 2dx = d^2$

Wird d^2 auf beiden Seiten zugezählt, so entsteht

$$(x - d) = 2d^2$$

Hieraus bestimmt sich die Kathete durch folgende Gleichung

1) $k = x = d + \sqrt{2d^2} = d + d\sqrt{2} = d(1 + \sqrt{2})$

und die Hypotenuse durch folgende

2) $H = x + d = 2d + \sqrt{2d^2} = d(2 + \sqrt{2})$

§. 220.

Aufgabe. Es ist die Summe der Hypotenuse und Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 238.

Auflösung. Die Summe der Hypotenuse und Höhe sey AE. Man theile die gegebene Linie in drei gleiche Theile und bemerke die Theilungspunkte B und D, errichte auf dem Punkte B den dritten Theil der Linie AE senkrecht und verbinde den Endpunkt C dieser senkrechten BC mit den beiden Punkten A und D durch gerade Linien, so ist das hiedurch entstandene Dreieck ACD das verlangte.

Der Beweis führt sich leicht durch die Bemerkung, daß die Höhe die Hälfte der Hypotenuse, also auch der dritte Theil von der Summe der Hypotenuse und Höhe ist.

§. 221.

Aufgabe. Es ist die Summe der Quadrate der Hypotenuse und Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck construiren. Fig. 239.

Erste Auflösung. Die Linie des Quadrates der Hypotenuse und Höhe sey GH. Man theile die Linie GH des gegebenen Summenquadrates in 5 gleiche Theile und halbire sie und beschreibe über ihr einen Halbkreis. Errichte an dem Endpunkte D des fünften Theils der Linie GH eine senkrechte Linie, so daß sie die Kreislinie in dem Punkte C durchschneidet, ziehe von diesem Punkte C auf die Endpunkte der Linie GH die Linien CG und CH, so ist GC die Höhe und CH die Hypotenuse des zu suchenden Dreiecks, woraus sich so fort nach §. 216. das verlangte Dreieck CBH leicht bilden läßt.

Beweis. Vermöge der Construction ist über der Linie GH ein rechtwinkliges Dreieck GCH gebildet worden und also die Summe der Quadrate der beiden Katheten dem Quadrate der Hypotenuse gleich. Die Linie GH ist in 5 gleiche Theile eingetheilt und die Linie CD steht auf der Linie GH senkrecht auf, daß sich die beiden Abschnitte GD und DH, wie 1 : 4, verhalten. Da sich nun die Quadrate der beiden Katheten, wie die ihnen anliegende Abschnitte der Hypotenuse verhalten, so ergibt sich folgende Proportion

$$GC^2 : CH^2 = 1 : 4$$

oder, wenn die Quadratwurzel aus drei Glieder dieser Proportion gezogen wird, $GC : CH = 1 : 2$.

Demnach ist die Linie CH doppelt so groß, als die Linie GC. Da nun in einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecke die auf der Hypotenuse aufstehende Höhe die Hälfte der Hypotenuse ist, so läßt sich über der Linie CH ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck CHB bilden, dessen Hypotenuse und Höhe zwei Quadrate erzeugen, deren Summe dem Quadrat der gegebenen Linie GH gleich ist.

Zweite Auflösung. Nennt man die Summe des Quadrates der Hypotenuse und Höhe S^2, die Höhe x, so ist

das Quadrat der Hypotenuse $S^2 - x^2$; die Höhe ist aber die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse, hier also zwischen ihren beiden Hälften, also ist $x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - x^2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - x^2}$

$= \frac{1}{4}S^2 - \frac{1}{4}x^2$

und hieraus ergibt sich für die Kathete folgende Gleichung

1) $x = \sqrt{\frac{1}{4}S^2}$

für die Hypotenuse

2) $H = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{\frac{3}{4}S^2}$

§. 222.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen den Quadraten der Hypotenuse und der Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 240.

Erste Auflösung. Die Seite des Unterschiedsquadrates sey BE. Man suche ihren dritten Theil EF und setze ihn in gerader Richtung an EF an, errichte in dem Endpunkte E eine senkrechte Linie und beschreibe über BF einen Halbkreis BCF, der die senkrechte Linie EC in einem Punkte C durchschneiden wird, ziehe BC, so ist BC die Hypotenuse und EC die Höhe. Halbirt man BC und errichtet in ihrem Mittelpunkte G die Linie GA = BG senkrecht und zieht AB und BC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Da die Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks der doppelten Höhe gleich ist, so ist das Quadrat der Hypotenuse das Vierfache von dem der Höhe und der Unterschied beider ist das Dreifache von dem der Höhe. Ist das dreifache Quadrat der Höhe gegeben und will man von diesem zu dem Quadrat der Hypotenuse übergehen, so muß der dritte Theil dieses Quadrates noch zugezählt werden. Da nun EF $= \frac{1}{3}$BE, so ist die Linie EC, als die mittlere geometrische Proportionale, $EC^2 = \frac{1}{3}BE \cdot BE = \frac{1}{3}BE^2$

BE^2 ist aber das dreifache Quadrat der Höhe. Werden nun beide vereinigt, so ist $BC^2 = BE^2 + EC^2$

oder $BC = \sqrt{BE^2 + \frac{1}{3}BE^2}$

Also ist BC die gesuchte Hypotenuse und BAC das gesuchte rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck.

Zweite Auflösung. Nennt man den Unterschied der Quadrate d^2, die Höhe x, so ist das Quadrat der Hypotenuse $H^2 = x^2 + d^2$
es ist aber $H = 2x$, also fließt hieraus die Gleichung
$$3x^2 = d^2$$
und hieraus gewinnt man für die Höhe folgende Gleichung
$$1) \quad x = \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = \frac{d}{\sqrt{3}}$$
für die Hypotenuse aber
$$2) \quad H = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{3}d^2} = \sqrt{\tfrac{4}{3}d^2} = 2d\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

§. 223.

Aufgabe. Es ist die Summe der Kathete und Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 241. Die Summenlinie sey DE. Man errichte an dem einen Endpunkte D eine durchschneidende senkrechte Linie, und an dem andern trage man den Winkel $DEC = \frac{1}{4}R$ an, dessen Schenkel EC die Linie DC in dem Punkte C schneiden wird, nun mache man $AD = BD = DC$, ziehe AB und AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke ABD und ADC congruent, rechtwinklig und gleichschenklig, folglich ist $y = y' = x = x' = \frac{1}{2}R$ und also der Winkel $BAC = R$ und $AB = AC$. Das Dreieck ABC ist also gleichschenklig und rechtwinklig.
Da der Winkel $x' = z + z'$, so ist $z' = x' - z = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R = \frac{1}{4}R$, also ist auch $z = z' = \frac{1}{4}R$ und das Dreieck AEC gleichschenklig und $AE = AC$, folglich auch
$$AD + AC = AD + AE = DE$$
Das Dreieck ABC erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Fig. 242. Die Summenlinie sey BE. Man bilde aus ihr, der Hälfte eines rechten Winkels $EBC = \frac{1}{4}R$, dem vierten Theile eines solchen $BED = \frac{1}{4}R$

Fig. 7

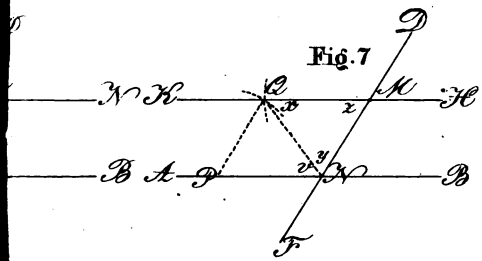


Fig. 15.

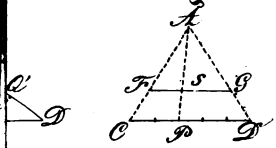
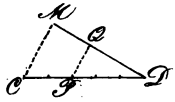


Fig. 16.



22.

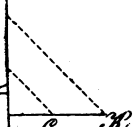


Fig. 23.

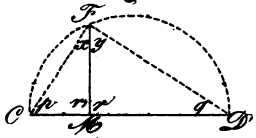


Fig. 30.

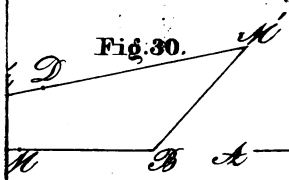


Fig. 32.

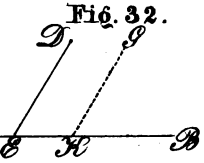


Fig. 37.

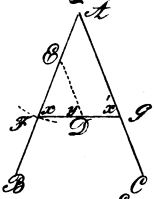


Fig. 38.

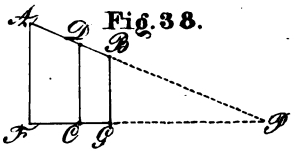


Fig. 45

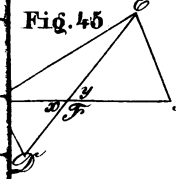
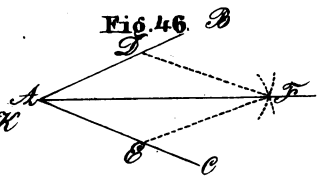
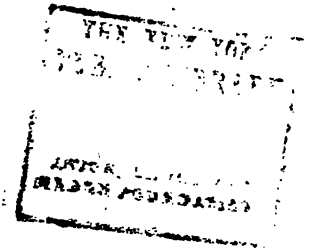


Fig. 46.





§. 221.

Aufgabe. Es ist die Summe der Quadrate der Hypotenuse und Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck construiren. Fig. 239.

Erste Auflösung. Die Linie des Quadrates der Hypotenuse und Höhe sey GH. Man theile die Linie GH des gegebenen Summenquadrates in 5 gleiche Theile und halbire sie und beschreibe über ihr einen Halbkreis. Errichte an dem Endpunkte D des fünften Theils der Linie GH eine senkrechte Linie, so daß sie die Kreislinie in dem Punkte C durchschneidet, ziehe von diesem Punkte C auf die Endpunkte der Linie GH die Linien CG und CH, so ist GC die Höhe und CH die Hypotenuse des zu suchenden Dreiecks, woraus sich so fort nach §. 216. das verlangte Dreieck CBH leicht bilden läßt.

Beweis. Vermöge der Construction ist über der Linie GH ein rechtwinkliges Dreieck GCH gebildet worden und also die Summe der Quadrate der beiden Katheten dem Quadrate der Hypotenuse gleich. Die Linie GH ist in 5 gleiche Theile eingetheilt und die Linie CD steht auf der Linie GH senkrecht auf, daß sich die beiden Abschnitte GD und DH, wie $1 : 4$, verhalten. Da sich nun die Quadrate der beiden Katheten, wie die ihnen anliegende Abschnitte der Hypotenuse verhalten, so ergibt sich folgende Proportion

$$GC^2 : CH^2 = 1 : 4$$

oder, wenn die Quadratwurzel aus drei Glieder dieser Proportion gezogen wird, $GC : CH = 1 : 2$.

Demnach ist die Linie CH doppelt so groß, als die Linie GC. Da nun in einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecke die auf der Hypotenuse aufstehende Höhe die Hälfte der Hypotenuse ist, so läßt sich über der Linie CH ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck CHB bilden, dessen Hypotenuse und Höhe zwei Quadrate erzeugen, deren Summe dem Quadrat der gegebenen Linie GH gleich ist.

Zweite Auflösung. Nennt man die Summe des Quadrates der Hypotenuse und Höhe S^2, die Höhe x, so ist

das Quadrat der Hypotenuse $S^2 - x^2$; die Höhe ist aber die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse, hier also zwischen ihren beiden Hälften, also ist $x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - x^2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{S^2 - x^2}$

$= \frac{1}{4}S^2 - \frac{1}{4}x^2$

und hieraus ergibt sich für die Kathete folgende Gleichung

1) $x = \sqrt{\frac{1}{2}S^2}$

für die Hypotenuse

2) $H = \sqrt{S^2 - x^2} = \sqrt{\frac{1}{2}S^2}$

§. 222.

Aufgabe. Es ist der Unterschied zwischen den Quadraten der Hypotenuse und der Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden. Fig. 240.

Erste Auflösung. Die Seite des Unterschiedsquadrates sey BE. Man suche ihren dritten Theil EF und setze ihn in gerader Richtung an EF an, errichte in dem Endpunkte E eine senkrechte Linie und beschreibe über BF einen Halbkreis BCF, der die senkrechte Linie EC in einem Punkte C durchschneiden wird, ziehe BC, so ist BC die Hypotenuse und EC die Höhe. Halbirt man BC und errichtet in ihrem Mittelpunkte G die Linie GA = BG senkrecht und zieht AB und BC, so ist BAC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Da die Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks der doppelten Höhe gleich ist, so ist das Quadrat der Hypotenuse das Vierfache von dem der Höhe und der Unterschied beider ist das Dreifache von dem der Höhe. Ist das dreifache Quadrat der Höhe gegeben und will man von diesem zu dem Quadrat der Hypotenuse übergehen, so muß der dritte Theil dieses Quadrates noch zugezählt werden. Da nun EF $= \frac{1}{3}$BE, so ist die Linie EC, als die mittlere geometrische Proportionale, $EC^2 = \frac{1}{3}BE \cdot BE = \frac{1}{3}BE^2$

BE^2 ist aber das dreifache Quadrat der Höhe. Werden nun beide vereinigt, so ist $BC^2 = BE^2 + EC^2$

oder $BC = \sqrt{BE^2 + \frac{1}{3}BE^2}$

Also ist BC die gesuchte Hypotenuse und BAC das gesuchte rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck.

Zweite Auflösung. Nennt man den Unterschied der Quadrate d^2, die Höhe x, so ist das Quadrat der Hypotenuse

$$H^2 = x^2 + d^2$$

es ist aber $H = 2x$, also fließt hieraus die Gleichung

$$3x^2 = d^2$$

und hieraus gewinnt man für die Höhe folgende Gleichung

$$1)\quad x = \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

für die Hypotenuse aber

$$2)\quad H = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{3}d^2} = \sqrt{\tfrac{4}{3}d^2} = 2d\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

§. 223.

Aufgabe. Es ist die Summe der Kathete und Höhe gegeben. Man soll daraus ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bilden.

Erste Auflösung. Fig. 241. Die Summenlinie sey DE. Man errichte an dem einen Endpunkte D eine durchschneidende senkrechte Linie, und an dem andern trage man den Winkel DEC $= \frac{1}{2}$ R an, dessen Schenkel EC die Linie DC in dem Punkte C schneiden wird, nun mache man AD $=$ BD $=$ DC, ziehe AB und AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Beweis. Nach der Construction sind die beiden Dreiecke ABD und ADC congruent, rechtwinklig und gleichschenklig, folglich ist $y = y' = x = x' = \frac{1}{2}$R und also der Winkel BAC $=$ R und AB $=$ AC. Das Dreieck ABC ist also gleichschenklig und rechtwinklig.

Da der Winkel $x' = z + z'$, so ist $z' = x' - z = \frac{1}{2}$R $- \frac{1}{4}$R $= \frac{1}{4}$R, also ist auch $z = z' = \frac{1}{4}$R und das Dreieck AEC gleichschenklig und AE $=$ AC, folglich auch

$$AD + AC = AD + AE = DE$$

Das Dreieck ABC erfüllt also die Bedingungen der Aufgabe.

Zweite Auflösung. Fig. 242. Die Summenlinie sey BE. Man bilde aus ihr, der Hälfte eines rechten Winkels EBC $= \frac{1}{2}$R, dem vierten Theile eines solchen BED $= \frac{1}{4}$R